

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова, В. П. Северин

**ОСНОВЫ
СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ
УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие
для студентов специальностей «Компьютерные науки» и
«Системный анализ», в том числе для иностранных студентов

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 2 от
17.05.2019 г.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2019

УДК 517.93:519(075.8)
А46

Утверждено редакционно-издательским советом университета,
протокол № 2 от 17.05.2019 г.

Рецензенты: *Шевчук Д. О.* – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автоматизации и энергоменеджмента Национального авиационного университета МОН Украины;
Кошевой Н. Д. – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой авиационных приборов и измерений Национального аэрокосмического университета им. Н. Е Жуковского «ХАИ» МОН Украины.

У навчальному посібнику розглянуто основні положення сучасної теорії керування складними технічними об'єктами, заснованої на побудові функції Ляпунова замкненої системи керування з подальшим її аналізом і оптимізацією.

Призначено для студентів спеціальностей «Комп'ютерні науки» та «Системний аналіз», у тому числі для іноземних студентів.

А46 Александров Е. Е. Основы современной теории управления: учебное пособие / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова, В. П. Северин. – Харьков. : Изд-во НТУ «ХПИ», Издательство ХНАДУ, 2019. – 324 с. – На рус. яз.

ISBN 978-966-303-745-5

В учебном пособии рассмотрены основные положения современной теории управления сложными техническими объектами, основанной на построении функции Ляпунова замкнутой системы управления с последующим её анализом и оптимизацией.

Предназначено для студентов специальностей «Компьютерные науки» и «Системный анализ», в том числе для иностранных студентов.

Ил. 74. Табл. 4. Библиогр.: 115 назв.

УДК 517.93:519(075.8)

© Александров Е. Е., Александрова Т. Е.,
Северин В. П., 2019
НТУ «ХПИ»
© Изд-во НТУ «ХПИ»,
Издательство ХНАДУ, 2019

ISBN 978-966-303-745-5

Содержание

| | |
|---|------------|
| Введение | 5 |
| Раздел 1. Пространство состояний в теории управления | 11 |
| 1.1. Понятие пространства состояний | 11 |
| 1.2. Математические модели динамических систем в пространстве состояний | 16 |
| 1.3. Матричные временные и частотные характеристики динамических систем | 22 |
| 1.4. Устойчивость динамических систем | 33 |
| 1.5. Об устойчивости по первому приближению | 39 |
| 1.6. Теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости установившегося равновесия динамических систем | 44 |
| Контрольные вопросы к разделу 1 | 50 |
| Раздел 2. Метод функций Ляпунова в задачах параметрического синтеза динамических систем | 52 |
| 2.1. Функции Ляпунова второго рода | 52 |
| 2.2. Параметрическая оптимизация динамических систем с сосредоточенными параметрами | 55 |
| 2.3. Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем | 66 |
| 2.4. Проектирование грубых динамических систем | 77 |
| 2.5. Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем с микропроцессором в контуре управления | 82 |
| 2.6. Параметрическая оптимизация динамических систем с распределенными параметрами | 88 |
| 2.7. Выбор критериев оптимальности в задачах параметрической оптимизации динамических систем | 103 |
| Контрольные вопросы к разделу 2 | 111 |
| Раздел 3. Параметрическая оптимизация стохастических динамических систем | 113 |
| 3.1. Особенности проектирования стохастических динамических систем | 113 |
| 3.2. Стохастическая оптимизация линейной динамической системы | 122 |

| | |
|---|------------|
| 3.3. Стохастическая оптимизация нелинейной динамической системы | 125 |
| 3.4. Стохастическая оптимизация регулируемой цифровой динамической системы | 130 |
| 3.5. Стохастическая оптимизация систем с распределенными параметрами | 134 |
| 3.6. Алгоритмическая стохастическая оптимизация динамических систем | 143 |
| 3.7. Параметрический синтез инвариантных регулируемых систем | 153 |
| 3.8. Параметрический синтез робастных регулируемых систем | 166 |
| 3.9. Параметрический синтез регулируемых динамических систем с регулятором переменной структуры | 168 |
| Контрольные вопросы к разделу 3 | 170 |
| Раздел 4. Основы методов одномерной оптимизации | 172 |
| 4.1. Введение в методы оптимизации | 172 |
| 4.2. Теоретические основы одномерной оптимизации | 179 |
| 4.3. Рекомендуемые алгоритмы общих подпрограмм | 182 |
| 4.4. Поиск интервала неопределенности | 183 |
| 4.5. Рекомендуемый алгоритм поиска интервала неопределенности..... | 189 |
| 4.6. Методы уменьшения интервала неопределенности | 190 |
| 4.7. Рекомендуемые алгоритмы методов уменьшения интервала неопределенности | 196 |
| 4.8. Методы аппроксимации и интерполяции | 200 |
| 4.9. Рекомендуемые алгоритмы методов аппроксимации и интерполяции | 208 |
| Контрольные вопросы к разделу 4 | 214 |
| Раздел 5. Основы методов многомерной оптимизации | 218 |
| 5.1. Основные понятия многомерной оптимизации | 218 |
| 5.2. Метод Ньютона и его модификации | 244 |
| 5.3. Методы сопряженных направлений | 262 |
| 5.4. Квазиньютоновские методы | 282 |
| Контрольные вопросы к разделу 5 | 308 |
| Список литературы | 317 |

ВВЕДЕНИЕ

Устройство, агрегат, машина и вообще любая система называется автоматической, если она выполняет свои основные функции без непосредственного участия человека. В связи с появлением и развитием автоматических систем возникла и новая отрасль науки – *автоматика*.

Автоматика представляет собой прикладную научную дисциплину, изучающую принципы построения и расчета автоматических систем.

Идея создания машин, которые работают без участия человека, возникла в древние времена. Первые автоматические устройства возникли для развлекательных целей и практического использования не имели, ибо не могли конкурировать с дешевым трудом рабов и крепостных.

Автоматы промышленного назначения были созданы в связи с изобретением паровых машин. Впервые автоматический регулятор был установлен на паровой машине, построенной в 1765 году И. И. Ползуновым на Барнаульском заводе. В этой машине автоматический регулятор поплавкового типа использовался для поддержания уровня воды в котле в заданных пределах.

В 1785 году английский механик Д. Уатт создал универсальную паровую машину с вращающимся кривошипом. Им же был запатентован центробежный регулятор для поддержания постоянной угловой скорости кривошипа.

Повышение точности регулирования угловой скорости вращения вала в системе «паровая машина – центробежный регулятор» определило необходимость разработки теоретических методов выбора параметров регулятора. В 1838 году известный ученый М. Ф. Ястржембский исследует различные схемы центробежных регуляторов и выводит из решения уравнений статики необходимые математические зависимости.

В 60-х годах XIX столетия начали появляться более мощные и совершенные в техническом отношении паровые машины, способные развивать высокие угловые скорости вращения вала. В этой связи начали наблюдаться случаи неустойчивой работы машин, оснащенных регулятором Уатта. В 1868 году появилась работа английского физика Д. К. Максвелла, посвященная регуляторам, в которой исследуется устойчивость замкнутой системы «паровая машина – центробежный регулятор». Максвелл привел доказательство, что такая система будет устойчивой лишь в том случае, если все действительные части корней алгебраического уравнения, которое является характеристическим для исследуемой системы, будут отрицательны. По его просьбе в 1877 году механиком Е. Раусом были получены необходимые и достаточные условия устойчивости системы уравнения в виде неравенств, составленных из коэффициентов характеристического уравнения.

В 1877 году профессор Санкт-Петербургского технологического университета И. А. Вышнеградский выпустил работу «О регуляторах прямого действия», в которой были рассмотрены вопросы динамической устойчивости и качества работы замкнутой системы «паровая машина – центробежный регулятор» и заложены основы математической теории линейных систем автоматического управления.

В 1892 году вышла в свет работа А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», где автор ввел математическое понятие устойчивости движения, а также разработал два метода решения задач об устойчивости динамических систем.

Работы И. А. Вышнеградского и А. М. Ляпунова подготовили базу для трудов чешского профессора А. Стодола, опубликованных в 1893–1895 годах. А. Стодола свел задачу устойчивости системы автоматического управления к исследованию сходимости решения линейного дифференциального уравнения. Он обратился к математику Цюрихского политехникума А. Гурвицу с просьбой о нахождении необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять значения коэффициентов линейного дифференциального уравнения n -го порядка, если процессы, описанные этим уравнением, являются сходящимися. В 1895 году А. Гурвиц отыскал эти условия. Поскольку идея критериев устойчивости

Рауса и Гурвица является общей, эти критерии объединили под общим названием критерия Рауса – Гурвица.

В 1905 году в Берлине появилась книга М. Толле «Регулирование двигателей», которая вскоре была переведена на русский язык и быстро распространилась среди инженеров. В этой работе впервые были изложены основы линейной теории автоматического управления.

Лекции Н. Е. Жуковского «Теория регулирования хода машин», прочитанные в Московском высшем техническом училище в 1908/1909 учебном году, были изданы в 1909 году и со временем получили широкую популярность. В этих лекциях Н. Е. Жуковский предложил новую форму записи уравнений динамики замкнутых систем автоматического управления, основанную на исследовании относительных безразмерных переменных, которая до сих пор используется в теории автоматического управления.

В 1938–1939 гг. вышли из печати работы А. В. Михайлова, положившие начало новым, так называемым частотным методом в теории автоматического управления. А. В. Михайлов предложил новый критерий устойчивости линейных систем, который базируется на графическом представлении функции комплексной переменной (годографе характеристического вектора системы) и показал его связь с критерием устойчивости Рауса – Гурвица. Идеи, заложенные в работах А. В. Михайлова, получили всестороннюю и глубокую разработку в работах В. В. Солодовникова [1], З. Ш. Блоха [2] и М. А. Айзермана [3].

В 1932 году М. М. Крылов и М. М. Боголюбов создали метод гармонической линеаризации нелинейностей. Впервые этот метод был использован для решения нелинейных задач теории управления Л. С. Гольдфарбом [4] в 1940 году.

В послевоенные годы теория автоматического управления, благодаря широкому распространению аналоговых и цифровых вычислительных машин, получила бурное развитие. Использование бортовых цифровых вычислительных машин значительно расширило возможности управления подвижными объектами. Фундаментальный вклад в развитие теории цифровых систем автоматического управления внесли Я. З. Цыпкин [5], Э. Джури [6], Ю. Ту [7].

В конце 60-х, начале 70-х годов предыдущего столетия получили интенсивное развитие методы синтеза многомерных и многосвязных систем автоматического управления, основанные на понятии пространства состояний, в том числе методы теории оптимальных систем управления, в работах А. А. Фельдбаума [8], Л. С. Понтрягина [9], В. Г. Болтянского [10], Р. Беллмана [11], Р. Калмана [12], Ю. Ту [13]. Эти методы составили основу современной теории управления.

В это же время начали развиваться отдельные направления современной теории управления – идентификация математических моделей возмущенного движения сложных технических объектов в работах Н. С. Ройтмана [14], декомпозиция математических моделей в работах Е. И. Геращенко и С. М. Геращенко [15], теория инвариантности в работах А. И. Кухтенко [16], теория адаптивных и самонастраивающихся систем в работах А. Г. Ивахненко [17], теория чувствительности систем автоматического управления в работах Е. Н. Розенвассера и Р. М. Юсупова [18], теория систем с переменной структурой в работах С. В. Емельянова [19] и Е. А. Барбашина [20]. Но наиболее интенсивное развитие получила теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в работах А. А. Красовского [21], А. М. Летова [22], Н. Н. Красовского [23], А. Г. Бутковского [24], Р. Т. Янушевского [25], Т. К. Сиразетдинова [26], Я. Н. Ройтенберга [27], М. Е. Салуквадзе [28], В. М. Кунцевича [29], Я. З. Цыпкина [30], В. Ф. Кротова [31], В. Ф. Кудина [32], П. Атанса и Фалба [33], П. Деруссо, Р. Роя, Ч. Клоуза [34] и других.

С помощью методов современной теории управления, изложенных в перечисленных работах, можно было решать задачи структурного и параметрического синтеза систем автоматического управления подвижными объектами и технологическими процессами, описываемыми линейными и нелинейными, стационарными и нестационарными, обыкновенными и в частных производных дифференциальными уравнениями высокого порядка. Вместе с тем, синтезированные с помощью современной теории управления системы автоматического управления предполагали: во-первых, использование информации о всех компонентах вектора состояния объекта управления и, во-вторых, полную определенность значений параметров объекта управления. Как первое, так и второе предложения

являются весьма сильными ограничивающими формами на пути практического использования этих методов. Так, в теории АКОР предполагается (как и в общей теории устойчивости А. М. Ляпунова), что результатом действия внешних возмущений на систему является выход последней из нулевого состояния установившегося равновесия $X=0$. и получение системой некоего начального возмущения $X(0)$. С этого момента система считалась предоставленной самой себе; относительно неконтролируемых внешних возмущений принималась единственная гипотеза об их ограниченности. Что касается неизмеряемых компонент вектора состояния системы, то здесь массовое распространение получили алгоритмы оценивания Р. Калмана (фильтры Калмана), использование которых для управления подвижными объектами с быстротекущими процессами являются непростой, а иногда и неразрешимой задачей.

В связи со сложившейся ситуацией в 80-х годах предыдущего столетия появились работы по синтезу системы автоматического управления в условиях неопределенности с получением гарантированных результатов качества управления. Это, прежде всего, работы В. Л. Харитонova [35], Б. Т. Поляка [37], С. В. Емельянова [38], А. Б. Куржанского [39], Ф. Л. Черноусько [40], В. М. Кунцевича и М. М. Лычака [41, 42], М. Аоки [43, 44], Г. М. Бакана и Н. Н. КуССуль [45].

Идея получения гарантированного результата в условиях неопределенности наиболее проста и ясно сформулирована академиком В. М. Кунцевичем в работе [42]. «Во многих случаях конструктор системы управления вынужден довольствоваться более легко получаемой, но и более скудной априорной информацией об ограниченности неопределенных величин или процессов. При этом ... для получения того или иного гарантированного результата он должен приписать природе ... злокозненные стремления максимизировать тот критерий, который конструктор системы стремится минимизировать. Необходимо признать, что при таком подходе к проектированию системы управления её создатель ориентируется на самый неблагоприятный случай. Но такова плата за возможность получения гарантированного результата» [42].

В предлагаемом для читателя учебном пособии, предназначенном для магистров и аспирантов, проходящих подготовку в области информационных технологий, рассматриваются три подхода к проблеме синтеза

систем автоматического управления. Первый подход основан на получении гарантированного результата при отсутствии данных о стохастических характеристиках возмущений, действующих на объект управления и изложен в работах [46–48]. Второй подход основан на предположении о наличии данных о стохастических характеристиках таких внешних возмущений и изложен в работах [49, 50]. И, наконец, третий подход, изложенный в работах [51, 52], основан на идее алгоритмического синтеза системы автоматического управления, когда отыскивается минимальное значение математического ожидания функционала качества, вычисляемое на решениях математической модели замкнутой системы при конкретных реализациях случайных внешних возмущений, получаемых с помощью созданных имитационных моделей этих возмущений. Использование последнего, третьего, подхода не требует представления математических моделей объектов управления в виде векторно-матричных разностных уравнений, что не является строго обоснованной математической процедурой.

Список публикаций, приведенный в учебном пособии, носит скорее историко-познавательный, чем рекомендуемый характер и ни в какой мере не претендует на полноту охвата материала, изложенного в нем.

Раздел 1

ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Понятие пространства состояний

Под динамической системой будем понимать объект любой физической природы или физический процесс, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), называемых математической моделью объекта или процесса. Состояние математической модели в момент времени t может быть представлено в виде элемента $X(t)$ множества G_x , которое можно рассматривать как пространство состояний динамической системы. Пространством состояний в функциональном анализе называется метрическое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы. В свою очередь метрическим пространством называется множество G_x , в котором задано расстояние между двумя его элементами $X_1 \in G_x$, $X_2 \in G_x$ в виде действительной функции $\rho(X_1, X_2)$, удовлетворяющей трем аксиомам [53]:

$\rho(X_1, X_2) = 0$, тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2$;

– $\rho(X_1, X_2) = \rho(X_2, X_1)$ – аксиома симметрии;

$\rho(X_1, X_3) \leq \rho(X_1, X_2) + \rho(X_2, X_3)$ – аксиома треугольника.

Пространство состояний в теории динамических систем используется для решения задач устойчивости и оптимизации, где необходимо введение метрики. Действительно, для исследования устойчивости невозмущенного состояния динамической системы $X=0$ естественно рассматривать изменение расстояния между возмущенным состоянием $X(t)$ и невозмущенным $X=0$ (рис. 1.1). При оптимизации динамической системы

необходимо введение критерия оптимальности, который, как правило, включает расстояние в пространстве состояний

$$I = \int_0^T \rho[X(t)] dt, \quad (1.1)$$

где $\rho[X(t)]$ – норма вектора состояния динамической системы в момент времени $0 \leq t \leq T$; T – время работы системы.

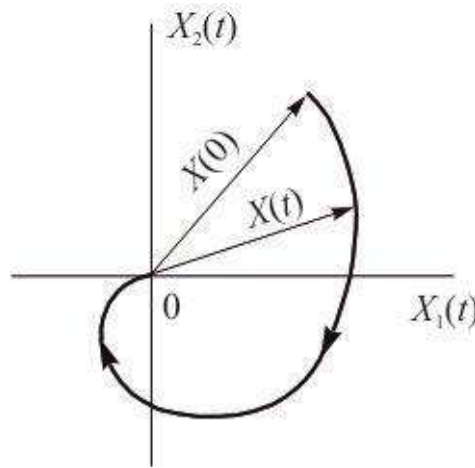


Рис. 1.1. К устойчивости двумерной динамической системы

Состояние динамической системы понимается как мгновенное состояние, состояние в текущий момент времени t . Процесс, протекающий во времени, отображается как движение точки в пространстве состояний.

Для большинства задач теории динамических систем понятие пространства состояний как метрического пространства является чрезмерно широким и удобнее пользоваться частными видами этого понятия. При решении задач устойчивости и оптимизации обычно достаточно самой простой метрики – эвклидовой и использования эвклидова пространства состояний. Элементам эвклидова пространства состояний R^n служат n -мерные векторы

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^*,$$

где индекс $*$ означает транспонирование, а расстояние ρ определяется как эвклидова норма разности векторов $X'(t)$ и $X''(t)$

$$\begin{aligned}
\rho[X'(t), X''(t)] &= \|X'(t) - X''(t)\| = \\
&= \left\{ [x'_1(t) - x''_1(t)]^2 + [x'_2(t) - x''_2(t)]^2 + \dots + [x'_n(t) - x''_n(t)]^2 \right\}^{1/2} = \\
&= \langle [X'(t) - X''(t)], [X'(t) - X''(t)] \rangle.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Расстояние (1.2) удовлетворяет приведенным выше аксиомам. При $n = 3$ евклидово пространство эквивалентно реальному трехмерному пространству.

Положим, что невозмущенное состояние динамической системы характеризуется нулевыми значениями компонент вектора состояния, иными словами, в состоянии установившегося равновесия $X = 0$. Тогда векторное дифференциальное уравнение, описывающее возмущенное движение динамической системы относительно невозмущенного состояния установившегося равновесия, имеет вид

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha]; \quad \alpha \in R^s, \tag{1.3}$$

где α – вектор варьируемых параметров динамической системы. Что касается вектор-функции Φ векторных аргументов $X(t)$ и α , то она считается заданной и принадлежащей некоторому классу функций, допускающему существование решения уравнения (1.3) при заданных $X(0)$ и α во всем пространстве состояний, либо в его областях, охватывающих интересующую исследователя часть пространства состояний.

Наряду с понятием динамической системы будем использовать понятие процесса. Если динамическая система описывается уравнением (1.3), то процесс в этой системе описывается решением уравнения (1.3) при определенном начальном условии $X(0)$ и определенном векторе варьируемых параметров α . Вектор состояния процесса обозначим через $X(t, \alpha)$. Конец вектора $X(t, \alpha)$, называемый изображающей точкой, при изменении времени t описывает в пространстве R^n фазовую траекторию. Характер протекания процесса определяет устойчивость и качество работы динамической системы.

Будем считать состояние установившегося равновесия динамической системы (1.3), определяемое нулевыми значениями компонент вектора состояния $X(t, \alpha)$ устойчивым по Ляпунову, или просто устойчивым, если

для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно будет найти такое другое положительное число $\eta(\varepsilon) > 0$, зависящее от ε , что во время возмущенного движения имеет место неравенство

$$\rho[X(t, \alpha)] \leq \varepsilon,$$

если вектор $X(0, \alpha)$ выбран из условия

$$\rho[X(0, \alpha)] \leq \eta(\varepsilon).$$

Иначе говоря, состояние установившегося равновесия динамической системы устойчиво по Ляпунову при условии, что за все время возмущенного движения изображающая точка не выйдет за пределы гиперсферы

$$\rho[X(t, \alpha)] = \varepsilon,$$

если начальное положение изображающей точки будет взято внутри гиперсферы

$$\rho[X(0, \alpha)] = \eta(\varepsilon).$$

Состояние установившегося равновесия динамической системы называют асимптотически устойчивым, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho[X(t, \alpha)] = 0.$$

Устойчивость динамической системы является необходимым, но далеко не достаточным условием ее практической пригодности. Помимо требования устойчивости динамическая система должна удовлетворять еще некоторым критериям качества, основными из которых являются запас устойчивости и быстродействие. Под запасом устойчивости понимают удаленность рабочей точки системы от границы области устойчивости, а под быстродействием – длительность переходного процесса в системе. На рис. 1.2 приведен характер изменения функции $\rho[X(t, \alpha)]$ для асимптотически устойчивой, устойчивой и неустойчивой систем. В современной теории управления для количественной оценки качества работы динамических систем используют, как правило, комплексные функционалы, учитывающие как запас устойчивости, так и быстродействие замкнутой системы управления. Так, качество работы системы мо-

жет быть оценено с помощью функционала (1.1), представляющего собой площадь под кривой функции $\rho[X(t, \alpha)]$. Действительно, чем меньше заштрихованная площадь, представленная на рис. 1.2, тем выше качество работы системы.

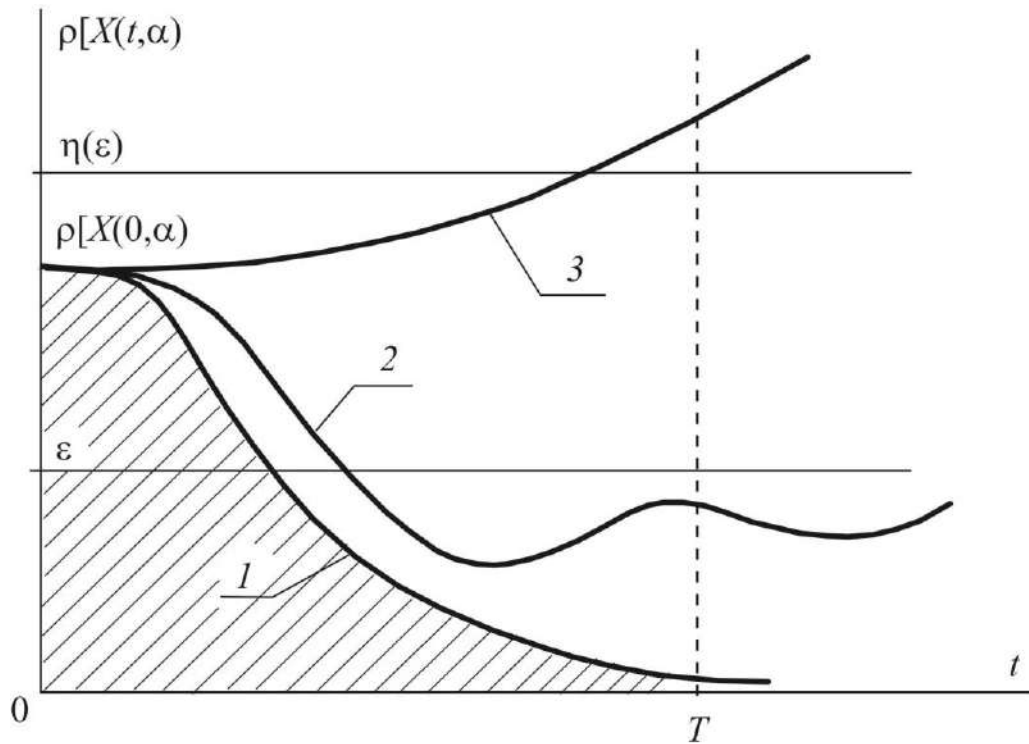


Рис. 1.2. Характер изменения функций $\rho[X(t, \alpha)]$:

1 – асимптотически устойчивая система; 2 – устойчивая система; 3 – неустойчивая система

В работе [13] для количественной оценки качества работы динамической системы предлагается использовать следующие виды функционалов:

1. функционал Майера

$$I(\alpha) = \rho^2[X(T, \alpha)]; \quad (1.4)$$

2. функционал Лагранжа

$$I(\alpha) = \int_0^T \rho^2[X(t, \alpha)] dt; \quad (1.5)$$

3. функционал Больца

$$I(\alpha) = \rho^2 [X(T, \alpha)] + \int_0^T \rho^2 [X(t, \alpha)] dt. \quad (1.6)$$

Компоненты вектора варьируемых параметров динамической системы α обычно представляют собой конструктивные параметры – геометрические, массовые, инерционные, электрические и т. п. Ограничения на изменение этих параметров выразим в виде системы неравенств

$$\Psi_k(\alpha) \leq 0 \quad (k = \overline{1, m}). \quad (1.7)$$

Неравенства (1.7) определяют область допустимых значений G_α вектора α в пространстве R^s . Тогда задача параметрической стабилизации динамической системы может быть сформулирована следующим образом. Необходимо отыскать такой вектор варьируемых параметров $\alpha \in G_\alpha$, чтобы на решениях системы (1.3) достигал минимума один из функционалов (1.4), (1.5) или (1.6).

1.2. Математические модели динамических систем в пространстве состояний

Любая динамическая система представляет собой соединение динамических звеньев, описываемых векторным дифференциальным уравнением

$$Y(t) = \Phi[Y(t), X(t)], \quad (1.8)$$

где $Y(t)$ – n -мерный вектор состояния динамического звена; $X(t)$ – m -мерный вектор входных воздействий (рис. 1.3).

Векторно-матричное дифференциальное уравнение (1.8) представим в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка

[illegible]


$$x_1(t) = x_{10}; \quad x_2(t) = x_{20}; \quad x_m(t) = x_{m0},$$
$$\begin{aligned} \Phi_1[y_{10}(t), y_{20}(t), \dots, y_{n0}(t), x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{m0}(t)] &= 0; \\ \Phi_2[y_{10}(t), y_{20}(t), \dots, y_{n0}(t), x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{m0}(t)] &= 0; \\ &\vdots \\ \Phi_n[y_{10}(t), y_{20}(t), \dots, y_{n0}(t), x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{m0}(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

17

$$\Delta \dot{Y}(t) = A \Delta Y(t) + B \Delta X(t). \quad (1.12)$$

Иногда для упрощения записи опускают индекс Δ перед векторами входных и выходных сигналов динамического звена. При этом необходимо помнить, что если уравнение

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + BX(t). \quad (1.13)$$

получено в результате линеаризации уравнения (1.8), то входной и выходной сигналы динамического звена в уравнении (1.13) представляют собой отклонения входного и выходного сигналов нелинейного динамического звена от их значений в состоянии установившегося равновесия, взятых за исходные при линеаризации.

Векторно-матричное уравнение (1.13) будем называть уравнением первого приближения по отношению к исходному уравнению (1.8).

Линеаризованное векторно-матричное дифференциальное уравнение возмущенного движения динамического звена запишем в операторной форме

$$(Ep - A) Y(t) = B X(t), \quad (1.14)$$

где p – символ дифференцирования.

Дифференциальное уравнение (1.14) преобразуем по Лапласу

$$(Es - A) Y(s) = B X(s), \quad (1.15)$$

где $X(s)$ и $Y(s)$ – преобразования Лапласа функция времени $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно.

Из уравнения (1.15) имеем

$$Y(s) = (Es - A)^{-1} B X(s). \quad (1.16)$$

Введем обозначение

$$W(s) = (Es - A)^{-1} B. \quad (1.17)$$

Матрица $W(s)$ содержит n строк и m столбцов и называется матричной передаточной функцией динамического звена. Каждый элемент матричной передаточной функции $w_{ij}(s)$ представляет собой отношение пре-

образования Лапласа i -го выходного сигнала динамического звена к преобразованию Лапласа j -го входного сигнала этого звена

$$w_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{x_j(s)}; \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}). \quad (1.18)$$

Рассмотрим замкнутую систему автоматического управления, представленную на рис. 1.4, где приняты следующие обозначения: ОУ – объект управления; АР – автоматический регулятор; $X(t)$ – n -мерный вектор состояния объекта управления; $U(t)$ – m -мерный вектор управления, формируемый автоматическим регулятором; $F(t)$ – r -мерный вектор внешних возмущений.

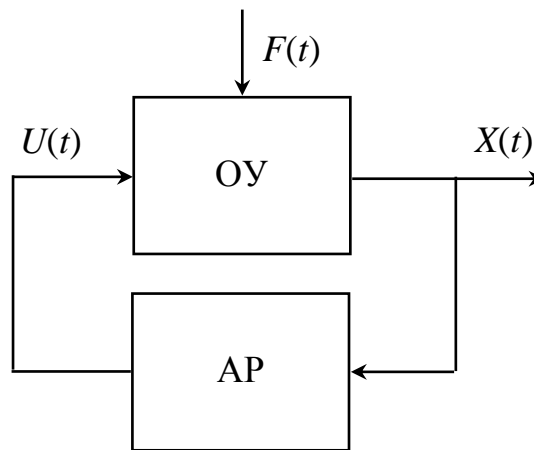


Рис. 1.4. Замкнутая САУ

Математическую модель объекта управления запишем в виде векторно-матричного дифференциального уравнения

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t)] + BU(t) + CF(t), \quad (1.19)$$

где B – прямоугольная матрица размером $n \times m$, называемая матрицей управления; C – прямоугольная матрица размером $n \times r$, называемая матрицей возмущения.

Линеаризация математической модели (1.19) приводит к линейному уравнению

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) + CF(t). \quad (1.20)$$

Вектор управления представим в виде линейного соотношения

$$U(t) = S(\alpha)X(t), \quad (1.21)$$

где $S(\alpha)$ – матрица размером $m \times n$.

Подставим соотношение (1.21) в уравнение (1.20). В результате получаем математическую модель возмущенного движения замкнутой системы управления

$$\dot{X}(t) = [A + BS(\alpha)]X(t) + CF(t). \quad (1.22)$$

В процессе проектирования динамической системы информация о векторе внешних возмущений $F(t)$ может отсутствовать. В этом случае предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ система мгновенно переходит из нулевого состояния $X = 0$ в состояние $X(0)$ и тотчас же предоставляется самой себе, то есть предполагается, что $F(t) = 0$, а возмущенное движение замкнутой системы описывается уравнением

$$\dot{X}(t) = [A + BS(\alpha)]X(t). \quad (1.23)$$

При этом устойчивая система из состояния $X(0)$ возвращается в малую окрестность состояния установившегося равновесия ε , если $\rho[X(0)] \leq \eta(\varepsilon)$; асимптотически устойчивая система возвращается в нулевое состояние установившегося равновесия, а неустойчивая система с течением времени неограниченно уходит от состояния установившегося равновесия, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho[X(t)] = \infty.$$

Решение уравнения (1.22) записывается в виде [27]

$$X(t, \alpha) = \Theta(t, \alpha)X(0) + \int_0^t \Theta(t, \alpha)\Theta^{-1}(\tau, \alpha)F(\tau) d\tau, \quad (1.24)$$

где $\Theta(t, \alpha)$ – фундаментальная матрица решений однородного уравнения (1.23), удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Theta}(t, \alpha) = [A + BS(\alpha)]\Theta(t, \alpha); \quad \Theta(0) = E. \quad (1.25)$$

1.3. Матричные временные и частотные характеристики динамических систем

Пусть матричная передаточная функция динамического звена записывается в виде

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \dots & w_{1m}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) & \dots & w_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1}(s) & w_{n2}(s) & \dots & w_{nm}(s) \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Матричной переходной функцией динамического звена назовем матрицу, связанную с матричной передаточной функцией (1.26) соотношением

$$H(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}, \quad (1.27)$$

где через $L^{-1} \{ \square \}$ обозначено обратное преобразование Лапласа функции комплексной переменной \square . Тогда матрица $H(t)$ принимает вид

$$H(t) = \begin{bmatrix} L^{-1} \left\{ \frac{w_{11}(s)}{s} \right\} & L^{-1} \left\{ \frac{w_{12}(s)}{s} \right\} & \dots & L^{-1} \left\{ \frac{w_{1m}(s)}{s} \right\} \\ L^{-1} \left\{ \frac{w_{21}(s)}{s} \right\} & L^{-1} \left\{ \frac{w_{22}(s)}{s} \right\} & \dots & L^{-1} \left\{ \frac{w_{2m}(s)}{s} \right\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^{-1} \left\{ \frac{w_{n1}(s)}{s} \right\} & L^{-1} \left\{ \frac{w_{n2}(s)}{s} \right\} & \dots & L^{-1} \left\{ \frac{w_{nm}(s)}{s} \right\} \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Матричной импульсной переходной функцией назовем матрицу, связанную с матричной передаточной функцией соотношением

$$\Omega(t) = L^{-1} \{ W(s) \} \quad (1.29)$$

или

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} L^{-1} \{ w_{11}(s) \} & L^{-1} \{ w_{12}(s) \} & \dots & L^{-1} \{ w_{1n}(s) \} \\ L^{-1} \{ w_{21}(s) \} & L^{-1} \{ w_{22}(s) \} & \dots & L^{-1} \{ w_{2n}(s) \} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^{-1} \{ w_{n1}(s) \} & L^{-1} \{ w_{n2}(s) \} & \dots & L^{-1} \{ w_{nm}(s) \} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Рассмотрим произвольный элемент матричной частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = \begin{bmatrix} w_{11}(j\omega) & w_{12}(j\omega) & \dots & w_{1m}(j\omega) \\ w_{21}(j\omega) & w_{22}(j\omega) & \dots & w_{2m}(j\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1}(j\omega) & w_{n2}(j\omega) & \dots & w_{nm}(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Выделим в этом элементе действительную и мнимую части

$$w_{ij}(j\omega) = U_{ij}(\omega) + j V_{ij}(\omega), \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}), \quad (1.32)$$

где $U_{ij}(\omega) = \operatorname{Re} w_{ij}(\omega); \quad V_{ij}(\omega) = \operatorname{Im} w_{ij}(\omega).$

Тогда матричные амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики записываются в виде

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} \sqrt{U_{11}^2(\omega) + V_{11}^2(\omega)} & \sqrt{U_{12}^2(\omega) + V_{12}^2(\omega)} & \dots & \sqrt{U_{1m}^2(\omega) + V_{1m}^2(\omega)} \\ \sqrt{U_{21}^2(\omega) + V_{21}^2(\omega)} & \sqrt{U_{22}^2(\omega) + V_{22}^2(\omega)} & \dots & \sqrt{U_{2m}^2(\omega) + V_{2m}^2(\omega)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{U_{n1}^2(\omega) + V_{n1}^2(\omega)} & \sqrt{U_{n2}^2(\omega) + V_{n2}^2(\omega)} & \dots & \sqrt{U_{nm}^2(\omega) + V_{nm}^2(\omega)} \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

$$\Psi(\omega) = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} \frac{V_{11}(\omega)}{U_{11}(\omega)} & \operatorname{arctg} \frac{V_{12}(\omega)}{U_{12}(\omega)} & \dots & \operatorname{arctg} \frac{V_{1m}(\omega)}{U_{1m}(\omega)} \\ \operatorname{arctg} \frac{V_{21}(\omega)}{U_{21}(\omega)} & \operatorname{arctg} \frac{V_{22}(\omega)}{U_{22}(\omega)} & \dots & \operatorname{arctg} \frac{V_{2m}(\omega)}{U_{2m}(\omega)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{arctg} \frac{V_{n1}(\omega)}{U_{n1}(\omega)} & \operatorname{arctg} \frac{V_{n2}(\omega)}{U_{n2}(\omega)} & \dots & \operatorname{arctg} \frac{V_{nm}(\omega)}{U_{nm}(\omega)} \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

а матричная амплитудно-фазо-частотная характеристика может быть получена при подстановке соотношений (1.32) в матрицу (1.31).

В качестве примера рассмотрим замкнутую систему наведения и стабилизации танковой пушки [51]. Объект управления, приведенный на рис. 1.5, – танковая пушка с электрогидравлическим усилителем – описывается системой дифференциальных уравнений

$$I_{\Pi} \ddot{\varphi}(t) = -k_{\text{м}} k_{\text{д}} \beta(t) + M_{\text{в}}(t); \quad (1.35)$$

$$I_{\text{к}} \ddot{\beta}(t) + f_{\text{к}} \dot{\beta}(t) + c_{\text{к}} \beta(t) = \frac{k_{\text{е}}}{r_0} u(t), \quad (1.36)$$

где $\varphi(t)$ – угол рассогласования между осью канала ствола танковой пушки и линией прицеливания; $\beta(t)$ – угол поворота коромысла электромагнитного электрогидравлического усилителя; $u(t)$ – управляющий сигнал, формируемый электронным блоком стабилизатора и подаваемый на вход электрогидравлического усилителя; $M_{\text{в}}(t)$ – возмущение, действующее на танковую пушку; I_{Π} – момент инерции пушки относительно оси цапф; $I_{\text{к}}$ – момент инерции коромысла относительно оси поворота; $f_{\text{к}}$ – коэффициент жидкостного трения в оси поворота коромысла; $c_{\text{к}}$ – коэффициент жесткости фиксирующей пружины; r_0 – оптическое сопротивление обмотки возбуждения управляющего электромагнита; $k_{\text{е}}$, $k_{\text{м}}$, $k_{\text{д}}$ – коэффициенты пропорциональности.

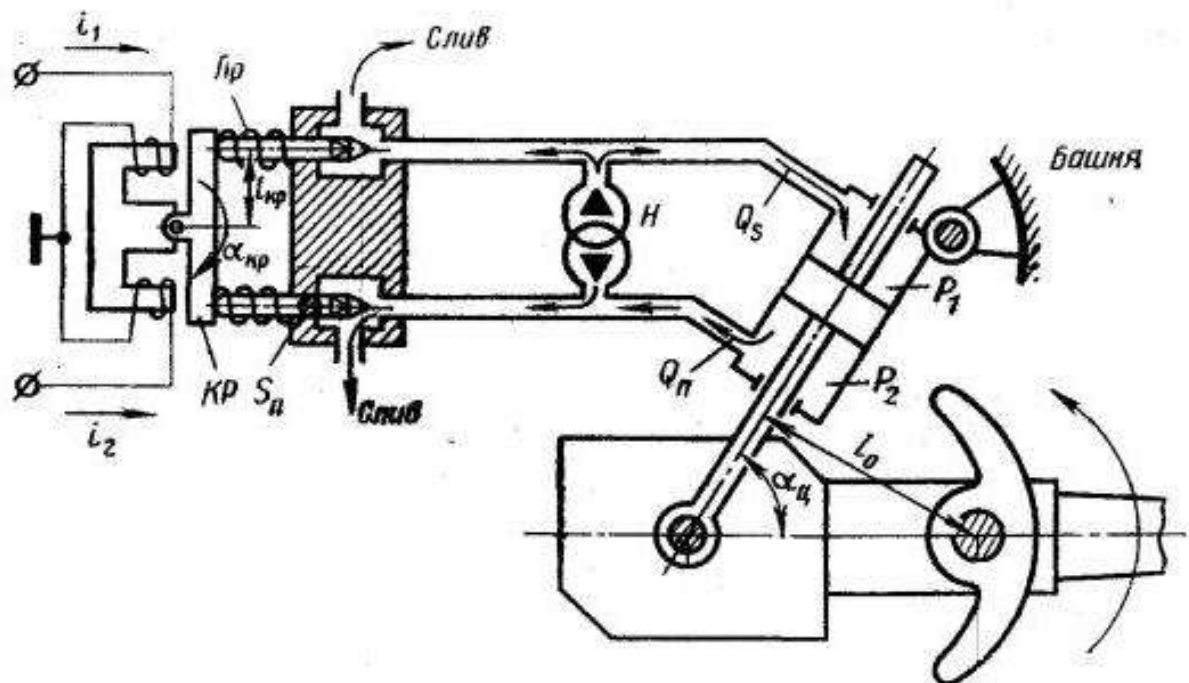


Рис. 1.5. Схема объекта управления

Разрешим дифференциальные уравнения (1.35) и (1.36) относительно старших производных

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{k_m k_d}{I_{\Pi}} \beta(t) + \frac{1}{I_{\Pi}} M_B(t); \quad (1.37)$$

$$\ddot{\beta}(t) = -\frac{c_K}{I_K} \beta(t) - \frac{f_K}{I_K} \dot{\beta}(t) + \frac{k_e}{I_K r_o} u(t). \quad (1.38)$$

Введем в рассмотрение вектор состояния объекта управления

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^* = [\varphi(t) \ \dot{\varphi}(t) \ \beta(t) \ \dot{\beta}(t)]^*$$

и запишем систему дифференциальных уравнений (1.37), (1.38) четвертого порядка в нормальной форме Коши, т. е. в виде системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_m k_d}{I_{\Pi}} x_3(t) + \frac{1}{I_{\Pi}} M_B(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= -\frac{c_K}{I_K} x_3(t) - \frac{f_K}{I_K} x_4(t) + \frac{k_e}{I_K r_o} u(t). \end{aligned} \quad (1.39)$$

В рассматриваемой системе вектор управления и вектор внешних возмущений являются одномерными

$$U(t) = u(t); \quad F(t) = M_B(t).$$

Тогда матрицы A , B и C , входящие в уравнение (1.20) для рассматриваемого объекта управления записываются

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_m k_d}{I_{\Pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{c_K}{I_K} & -\frac{f_K}{I_K} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_e}{I_K r_o} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{I_{\Pi}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что электронный блок стабилизации формирует управляющую функцию $u(t)$ в виде

$$u(t) = k_{\varphi} u_{\varphi}(t) + k_{\dot{\varphi}}(t) u_{\omega\varphi}(t), \quad (1.40)$$

где $u_{\varphi}(t)$ и $u_{\omega\varphi}(t)$ – выпрямленные электронным блоком выходные сигналы гироскопического датчика угла и гироскопического датчика угловой скорости, причем

$$u_{\varphi}(t) = k_{\Gamma} \varphi(t); \quad u_{\omega\varphi}(t) = k_{\text{с}} \omega_{\varphi}(t). \quad (1.41)$$

Учитывая, что

$$\omega_{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(t),$$

и подставляя соотношения (1.41) в (1.40), получаем

$$u(t) = k_{\varphi} k_{\Gamma} \varphi(t) + k_{\dot{\varphi}} k_{\text{с}} \dot{\varphi}(t). \quad (1.42)$$

Переходя к новым переменным, соотношение (1.42) запишем в виде

$$u(t) = k_{\varphi} k_{\Gamma} x_1(t) + k_{\dot{\varphi}} k_{\text{с}} x_2(t). \quad (1.43)$$

Пусть вектор варьируемых параметров рассматриваемой системы равен

$$\alpha^* = [k_{\varphi} \quad k_{\dot{\varphi}}].$$

Тогда матрица $S(\alpha) = S(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})$, входящая в соотношение (1.21), равна

$$S(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}) = \begin{bmatrix} k_{\varphi} k_{\Gamma} & k_{\dot{\varphi}} k_{\text{с}} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а собственная матрица замкнутой системы, входящая в уравнение (1.22), записывается

$$A + BS(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{\text{м}} k_{\text{д}}}{I_{\text{п}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{\text{е}} k_{\Gamma}}{I_{\text{к}} r_{\text{о}}} k_{\varphi} & \frac{k_{\text{е}} k_{\text{с}}}{I_{\text{к}} r_{\text{о}}} k_{\dot{\varphi}} & -\frac{c_{\text{к}}}{I_{\text{к}}} & -\frac{f_{\text{к}}}{I_{\text{к}}} \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Рассмотрим уравнение (1.22). Запишем его в виде

$$\left\{ Ep - \left[A + BS(k_\phi, k_{\dot{\phi}}) \right] \right\} X(t) = CF(t). \quad (1.45)$$

Из (1.45) имеем

$$X(t) = \left\{ Ep - \left[A + BS(k_\phi, k_{\dot{\phi}}) \right] \right\}^{-1} CF(t). \quad (1.46)$$

В результате матричная передаточная функция замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки равна

$$W(s) = \left\{ Es - \left[A + BS(k_\phi, k_{\dot{\phi}}) \right] \right\}^{-1} C. \quad (1.47)$$

Матричная передаточная функция представляет собой матрицу-столбец размером 4×1 с элементами

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_{12}(s) \\ w_{22}(s) \\ w_{32}(s) \\ w_{42}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L\{\varphi(t)\}}{L\{M_B(t)\}} \\ \frac{L\{\dot{\varphi}(t)\}}{L\{M_B(t)\}} \\ \frac{L\{\beta(t)\}}{L\{M_B(t)\}} \\ \frac{L\{\dot{\beta}(t)\}}{L\{M_B(t)\}} \end{bmatrix}.$$

Подставляя в формулу (1.47) соотношения (1.44) и матрицу C , получаем

$$w_{12}(s) = \frac{I_K s^2 + f_K s + c_K}{I_\Pi s^2 (I_K s^2 + f_K s + c_K) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s)}; \quad (1.48)$$

$$w_{22}(s) = \frac{s(I_K s^2 + f_K s + c_K)}{I_\Pi s^2 (I_K s^2 + f_K s + c_K) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s)}; \quad (1.49)$$

$$w_{32}(s) = \frac{\frac{k_e}{r_o} (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s)}{I_\Pi s^2 (I_K s^2 + f_K s + c_K) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s)}; \quad (1.50)$$

$$w_{42}(s) = \frac{\frac{k_e}{r_o} s (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s)}{I_\Pi s^2 (I_K s^2 + f_K s + c_K) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s)}, \quad (1.51)$$

где
$$k_y = \frac{k_e k_M k_d}{r_o}.$$

Характеристическим уравнением замкнутой системы (1.39), (1.42) называется алгебраическое уравнение

$$\det \{ Es - [A + BS(k_\phi, k_{\dot{\phi}})] \} = 0. \quad (1.52)$$

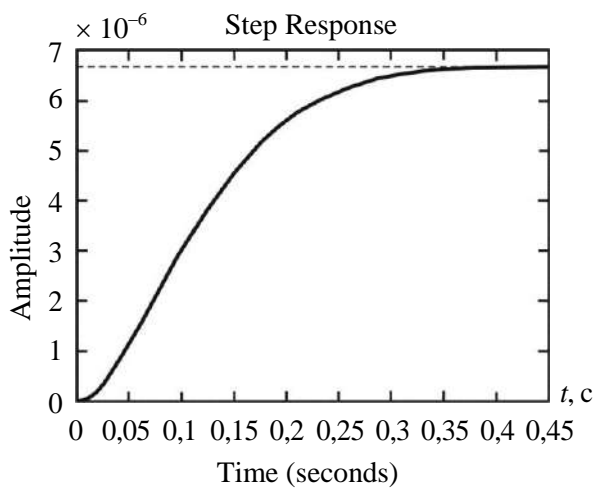
Подставим в левую часть уравнения (1.52) матрицу (1.44). В результате характеристическое уравнение замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки записывается

$$I_\Pi s^2 (I_K s^2 + f_K s + c_K) + k_y (k_\phi k_\Gamma + k_{\dot{\phi}} k_c s) = 0. \quad (1.53)$$

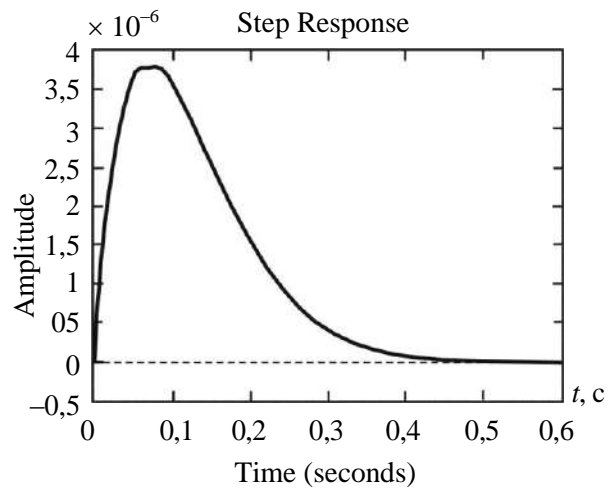
Положим $I_\Pi = 736,9 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $I_K = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $f_K = 0,55 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $c_K = 3,21 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $k_e = 0,98 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-1}$; $k_\Gamma = 20 \text{ В}$; $k_c = 5 \text{ В} \cdot \text{с}$; $k_\phi = 100$; $k_{\dot{\phi}} = 50$; $k_y = 0,243 \cdot 10^5 \text{ Н}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1}$; $r_o = 30 \text{ Ом}$; $k_d = 1,238 \cdot 10^7 \text{ Па}$; $k_M = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Па}^{-1}$.

Использование таблиц преобразований Лапласа для построения матричной переходной функции (1.27) и матричной импульсной переходной функции (1.29) проблематично, вследствие сложности передаточных функций (1.48)–(1.51). Вместе с тем, использование современных программных продуктов, в частности, пакета «Simulink», позволяет построить матричные временные характеристики замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки. Для приведенных выше значений параметров системы использование пакета «Simulink» приводит к переходным

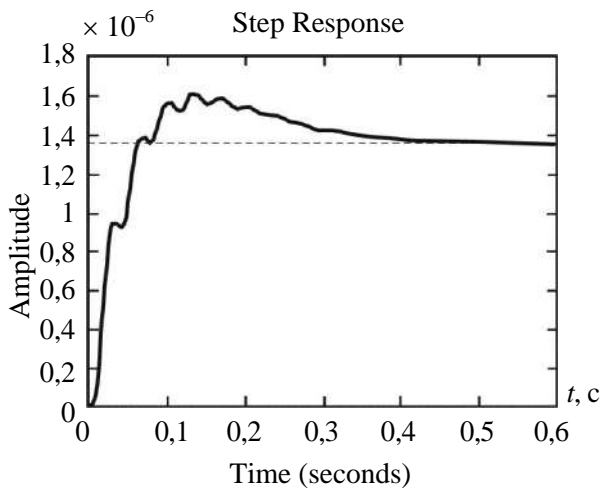
функциям, приведенным на рис. 1.6 и к импульсным переходным функциями, приведенным на рис. 1.7.



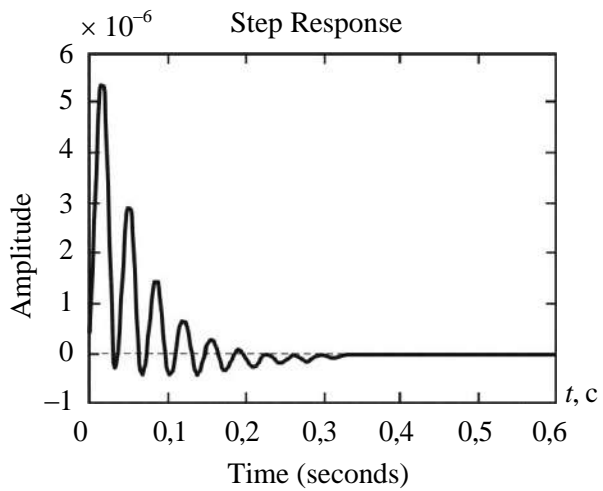
a



б

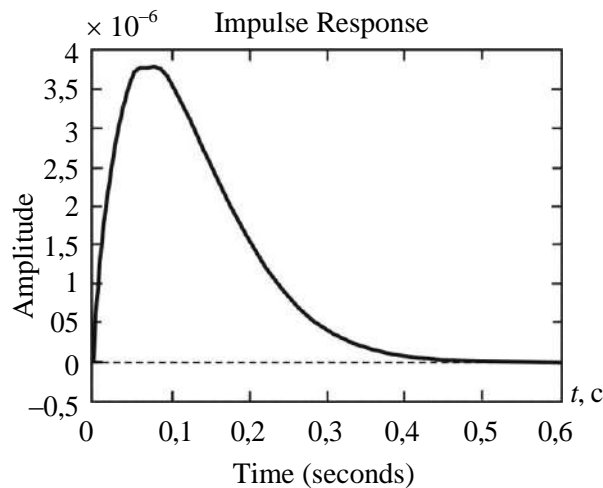


в

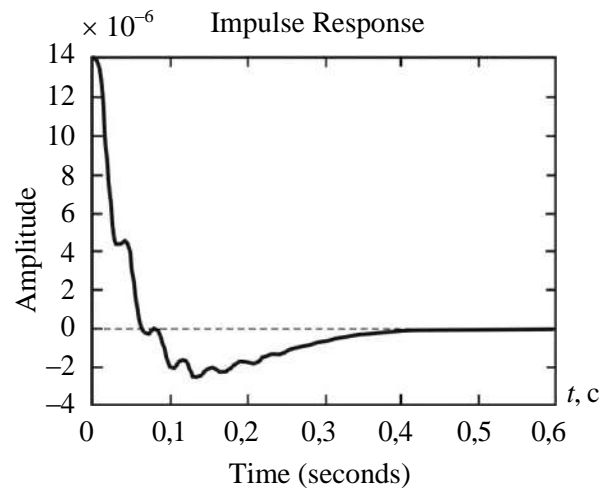


г

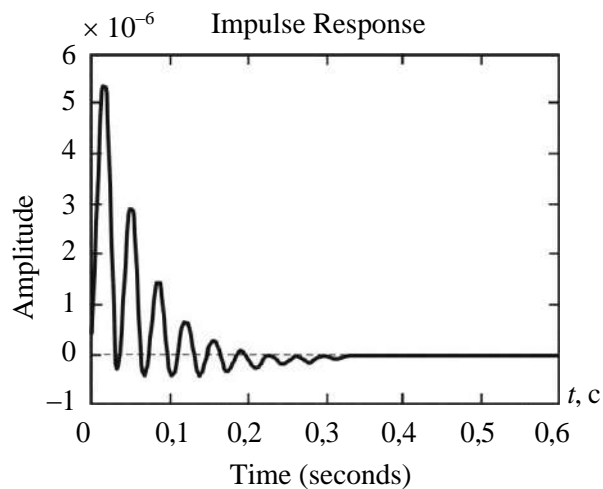
Рис. 1.6. Переходные функции замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки:
a – $h_{12}(t)$; *б* – $h_{22}(t)$; *в* – $h_{32}(t)$; *г* – $h_{42}(t)$



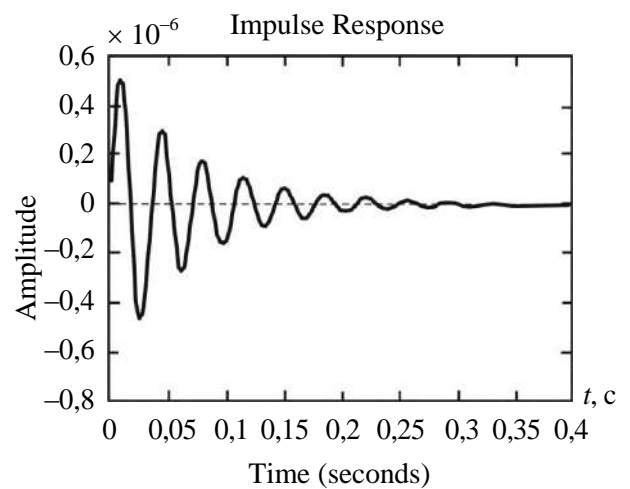
a



б



в



г

Рис. 1.7. Импульсные переходные функции замкнутых систем наведения и стабилизации танковой пушки:

$$a - \omega_{12}(t); \quad б - \omega_{22}(t); \quad в - \omega_{32}(t); \quad г - \omega_{42}(t)$$

На рис. 1.8 приведены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики (1.33) и (1.34) замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки, построенные с помощью пакета «Simulink», а на рис. 1.9 – амплитудно-фазо-частотные характеристики той же системы, построенные при изменении ω от 0 до ∞ .

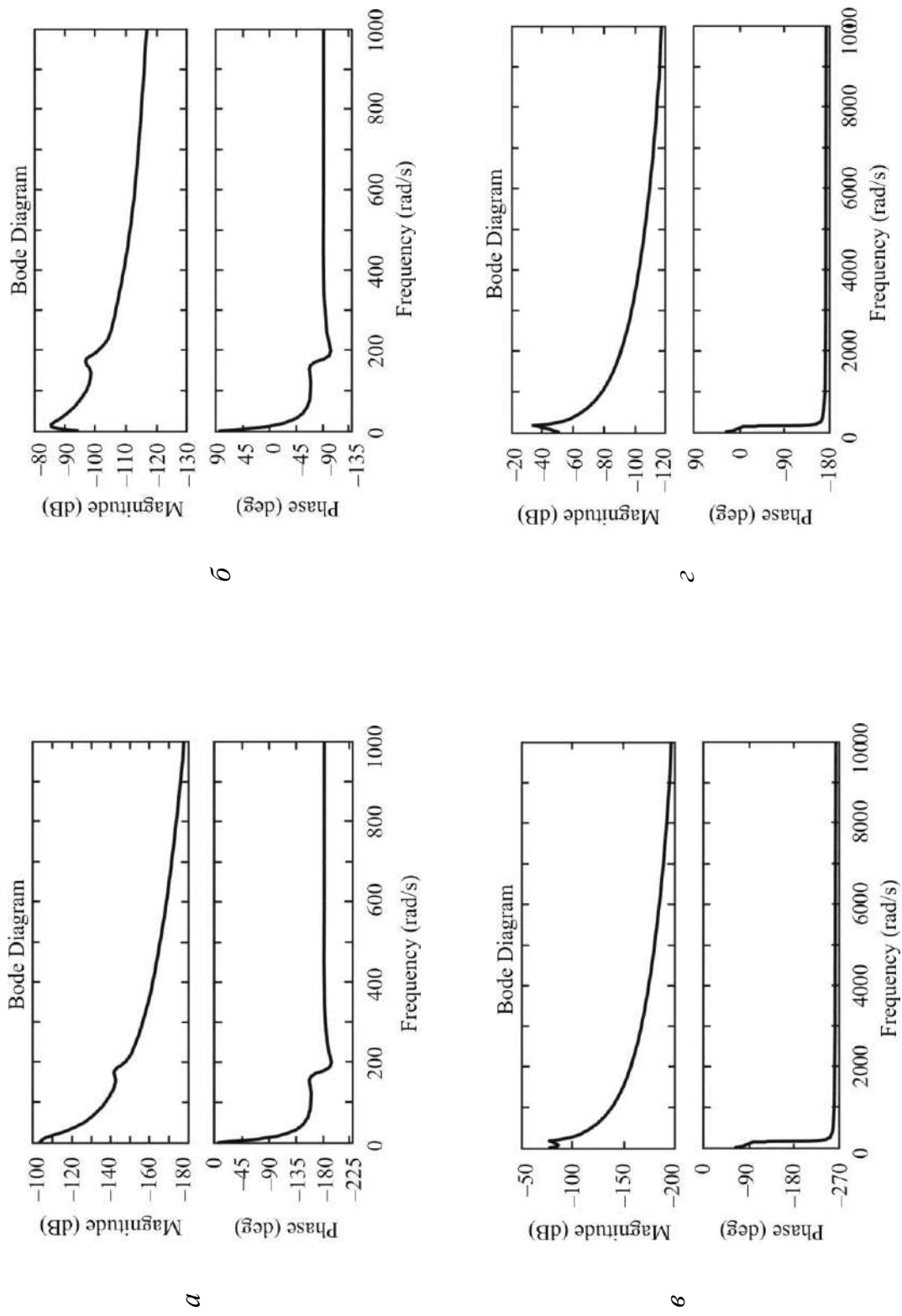


Рис. 1.8. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики замкнутой системы наведения стабилизации танковой пушки: *a* – $w_{12}(j\omega)$; *б* – $w_{22}(j\omega)$; *в* – $w_{32}(j\omega)$; *г* – $w_{42}(j\omega)$

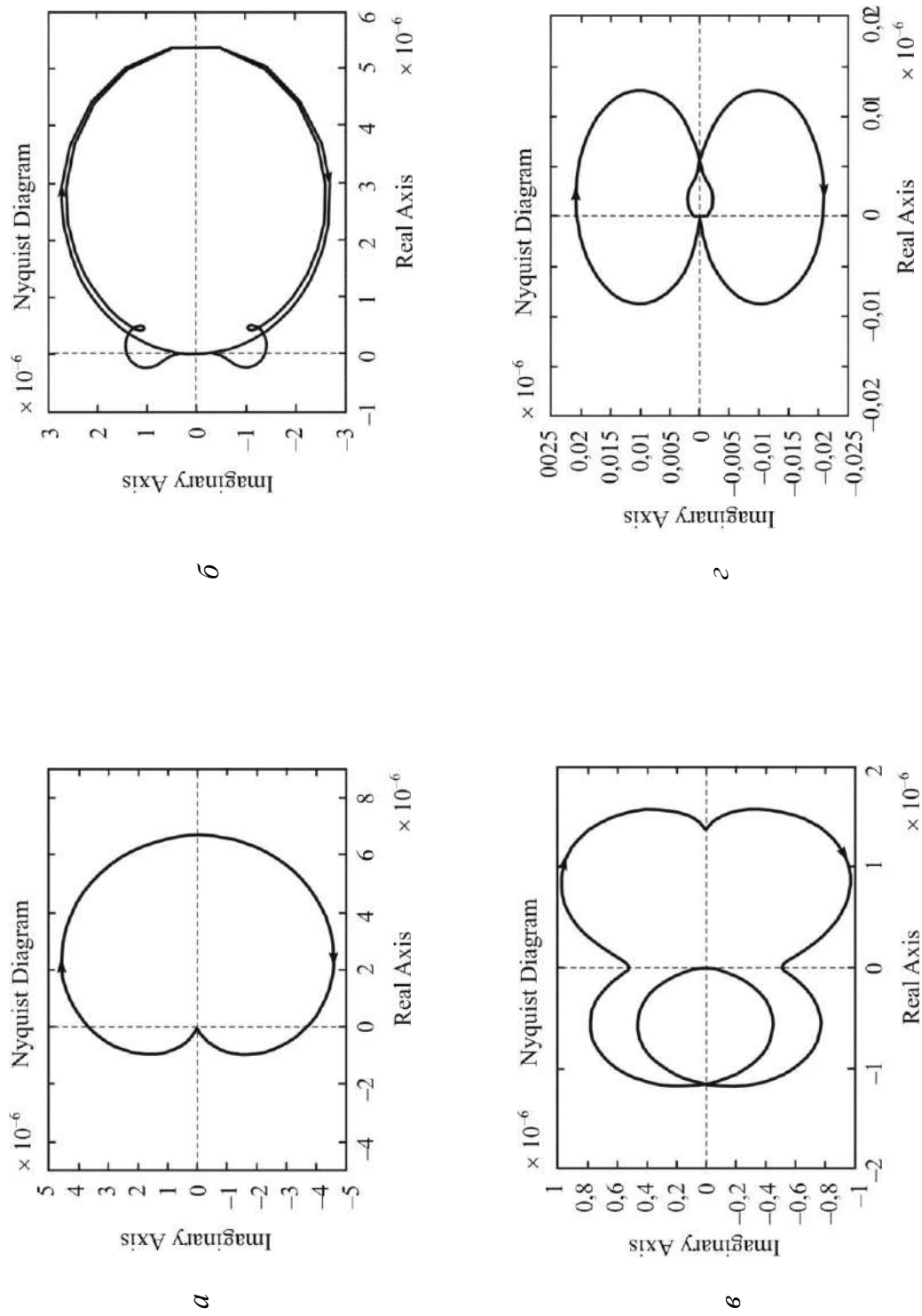


Рис. 1.9. Амплитудно-фазо-частотные характеристики замкнутой системы наведения стабилизации танковой пушки:

$a - w_{12}(j\omega)$; $б - w_{22}(j\omega)$; $в - w_{32}(j\omega)$; $г - w_{42}(j\omega)$

1.4. Устойчивость линейных динамических систем

Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой линейной системы автоматического управления

$$\det \{ Es - [A + BS(\alpha)] \} = 0 \quad (1.54)$$

или

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (1.55)$$

Корни характеристического уравнения (1.54) или (1.55) обозначим через s_1, s_2, \dots, s_n . Тогда решение однородного дифференциального уравнения

$$\dot{X}(t) = [A + BS(\alpha)] X(t) \quad (1.56)$$

записываются в виде [54]:

$$X(t) = [C \Theta(t)]^*,$$

где C – вектор-строка произвольных постоянных

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n],$$

определяемых начальным условием

$$C = [X(0)]^*,$$

$\Theta(t)$ – фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения (1.56), удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.25) с начальным условием

$$\Theta(0) = E.$$

Известно [54], что система n однородных дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна одному дифференциальному уравнению n -го порядка

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = 0, \quad (1.57)$$

решение которого (при отсутствии кратных корней характеристического уравнения (1.55)) записывается в виде

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + c_3 e^{s_3 t} + \dots + c_n e^{s_n t}. \quad (1.58)$$

Пусть k -й корень характеристического уравнения (1.55) действительный положительный

$$s_k = +\alpha_k.$$

Тогда слагаемое в решении (1.58), соответствующее этому корню, равно

$$c_k e^{\alpha_k t}.$$

С течением времени это слагаемое неограниченно возрастает и, следовательно, неограниченно возрастает решение (1.58).

Если k -й корень характеристического уравнения (1.55) действительный отрицательный

$$s_k = -\alpha_k,$$

то слагаемое в решении (1.58), соответствующее этому корню, равно

$$c_k e^{-\alpha_k t}$$

и неограниченно убывает с течением времени.

Если же k -й корень характеристического уравнения (1.55) действительный нулевой

$$s_k = 0,$$

то слагаемое в решении (1.58), соответствующее этому корню, равно

$$c_k e^{0t} = c_k.$$

С течением времени это слагаемое не возрастает и не убывает, а остается постоянным. В этом случае говорят, что система находится на границе устойчивости.

Пусть k и $k+1$ корни характеристического уравнения (1.55) комплексно-сопряженные с положительной действительной частью

$$s_{k, k+1} = \alpha_k \pm j\beta_k.$$

Слагаемые в решении (1.58), соответствующие этим корням, равны

$$c_k e^{(\alpha_k + j\beta_k)t} + c_{k+1} e^{(\alpha_k - j\beta_k)t} = A_k e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t.$$

Эти слагаемые с течением времени неограниченно возрастают.

Если k и $k+1$ корни характеристического уравнения (1.55) комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью

$$s_{k, k+1} = -\alpha_k \pm j\beta_k,$$

то

$$c_k e^{(-\alpha_k + j\beta_k)t} + c_{k+1} e^{(-\alpha_k - j\beta_k)t} = A_k e^{-\alpha_k t} \sin \beta_k t.$$

Эти слагаемые с течением времени неограниченно затухают.

Если же k и $k+1$ корни уравнения (1.55) являются чисто мнимыми

$$s_{k, k+1} = \pm j\beta_k,$$

то слагаемые в решении (1.58), соответствующие этим корням, равны

$$c_k e^{j\beta_k t} + c_{k+1} e^{-j\beta_k t} = A_k \sin \beta_k t.$$

Эти слагаемые с течением времени не возрастают и не убывают неограниченно, поэтому система находится на границе области устойчивости.

Резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы:

- если все корни характеристического уравнения (1.55) системы (1.56) имеют отрицательные действительные части, то такая система является устойчивой;
- если среди корней характеристического уравнения (1.55) системы (1.56) имеется хотя бы один корень с положительной действительной частью, то такая система является неустойчивой;
- если характеристическое уравнение (1.55) системы (1.56), не имея корней с положительной действительной частью, имеет нулевой действительный корень или пару чисто мнимых корней, то такая система является нейтральной, или находящейся на границе устойчивости.

Таким образом, мнимая ось комплексной плоскости корней характеристического уравнения (1.55) линейной замкнутой системы (1.56) является границей области устойчивости в этой плоскости.

Если все корни характеристического уравнения (1.55) системы (1.56) расположены слева от мнимой оси плоскости корней, то система (1.56) является устойчивой.

На рис. 1.10 показано расположение корней характеристического уравнения (1.53) замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки.

Из анализа рисунка можно сделать заключение о том, что характеристическое уравнение (1.53) содержит два действительных корня s_1 и s_2 , соответствующих движению танковой пушки, и два комплексно-сопряженных корня s_3 и s_4 , соответствующие высокочастотным колебаниям коромысла электрогидравлического усилителя. Все корни расположены слева от мнимой оси комплексной плоскости корней, что соответствует устойчивости замкнутой системы. В комплексной плоскости корней характеристического уравнения область устойчивости представляет собой левую полуплоскость.

При исследовании устойчивости замкнутых линейных систем автоматического управления гораздо удобнее использовать область устойчивости, построенную в плоскости варьируемых параметров автоматического регулятора. На примере замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки покажем методику построения области устойчивости системы с характеристическим уравнением (1.53) в плоскости варьируемых параметров $(k_\phi, k_{\dot{\phi}})$. Для этого в характеристическом уравнении (1.53) произведем замену $s = j\omega$, выделим в левой части полученного соотношения действительную и мнимую части и приравняем их нулю:

$$X(\omega, k_\phi, k_{\dot{\phi}}) = k_y k_r k_\phi - I_{пс} \omega^2 + I_{пк} \omega^4 = 0; \quad (1.59)$$

$$Y(\omega, k_\phi, k_{\dot{\phi}}) = k_y k_c k_{\dot{\phi}} - I_{пф} \omega^3 = 0. \quad (1.60)$$

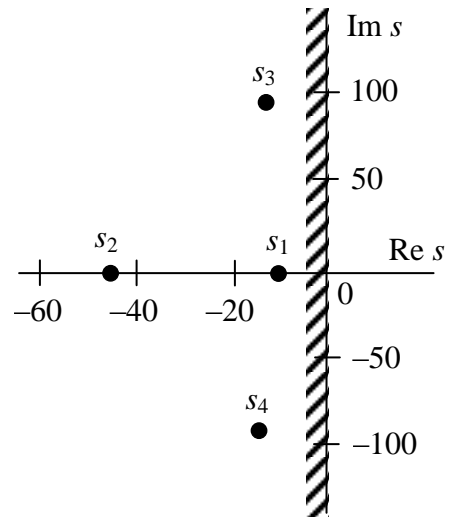


Рис. 1.10. Расположение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости корней

Из уравнений (1.59) и (1.60) получаем

$$k_{\varphi} = \frac{1}{k_y k_{\Gamma}} \left(I_{\Pi} c_{\kappa} - I_{\Pi} I_{\kappa} \omega^2 \right) \omega^2; \quad (1.61)$$

$$k_{\dot{\varphi}} = \frac{1}{k_y k_c} I_{\Pi} f_{\kappa} \omega^2. \quad (1.62)$$

Используя соотношения (1.61) и (1.62), построим границу области устойчивости в плоскости варьируемых параметров $(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})$ при изменении ω от нуля до бесконечности (рис. 1.11).

Для выделения области устойчивости рассмотрим определитель, составленный из частных производных

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\omega, k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})}{\partial k_{\varphi}} & \frac{\partial X(\omega, k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})}{\partial k_{\dot{\varphi}}} \\ \frac{\partial Y(\omega, k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})}{\partial k_{\varphi}} & \frac{\partial Y(\omega, k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})}{\partial k_{\dot{\varphi}}} \end{vmatrix}. \quad (1.63)$$

Правило штриховки, используемое при выделении области устойчивости, состоит в следующем [3]. Если перемещаться вдоль границы области устойчивости в сторону возрастания ω и одновременно вычислять значение определителя (1.63), то границу следует штриховать слева, если определитель (1.63) положителен, или справа, если определитель (1.63) отрицателен. При соблюдении этого правила штриховка направлена внутрь области устойчивости.

Подставим в определитель (1.63) соотношения (1.59) и (1.60). В результате получаем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_y k_{\Gamma} & 0 \\ 0 & k_y k_c \omega \end{vmatrix} = k_y^2 k_{\Gamma} k_c \omega. \quad (1.64)$$

При $\omega > 0$ определитель (1.64) положителен, следовательно, границу области устойчивости следует штриховать слева.

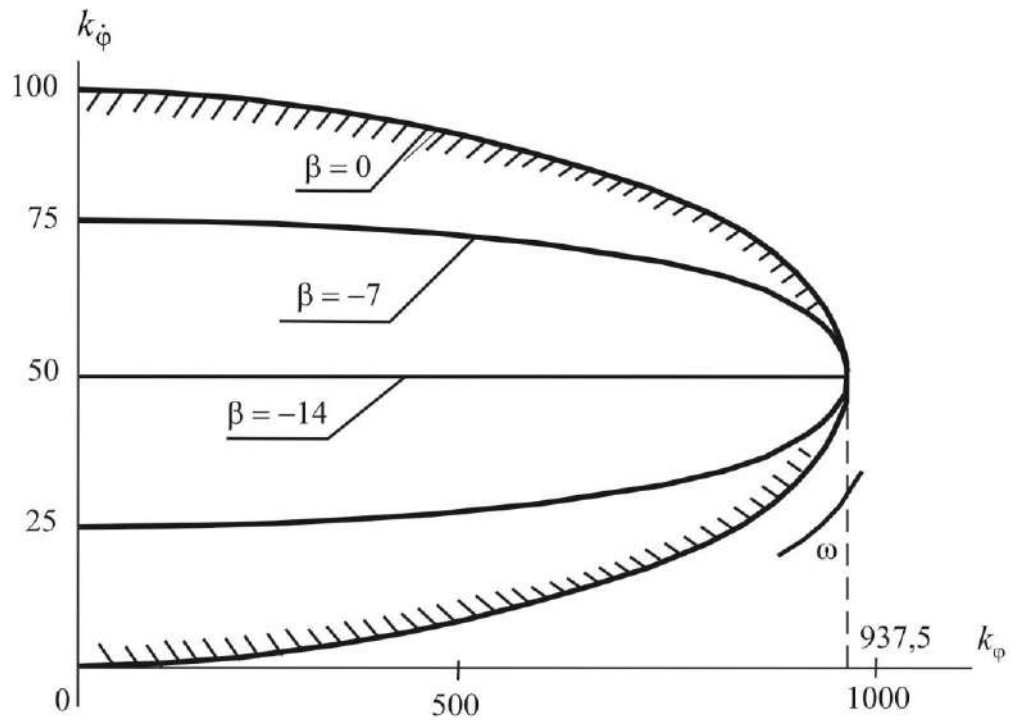


Рис. 1.11. Граница области устойчивости и линии равной степени устойчивости

В комплексной плоскости корней, представленной на рис. 1.10, проведем прямую параллельную мнимой оси и отстоящую от мнимой оси влево на расстоянии $\beta < 0$. Если все корни характеристического уравнения (1.55) замкнутой системы (1.56) находятся слева от этой линии, то это означает, что замкнутая система имеет степень устойчивости не меньше β [55]. Будем передвигать линию влево, увеличивая расстояние β от этой линии до мнимой оси. Когда на этой линии окажется ближайший к мнимой оси действительный корень или ближайшая пара комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения, то расстояние β^* является степенью устойчивости замкнутой системы.

В характеристическом уравнении (1.55) произведем замену

$$s = \beta + j\omega,$$

выделим в левой части полученного соотношения действительную и мнимую части, приравняем их нулю и разрешим полученную систему относительно варьируемых параметров k_φ и $k_{\dot{\varphi}}$:

$$k_{\phi} = \frac{1}{k_y k_r} \left(3I_{\pi} I_{\kappa} \beta^4 + 2I_{\pi} I_{\kappa} \beta^2 \omega^2 - I_{\pi} I_{\kappa} \omega^4 + 2I_{\pi} f_{\kappa} \beta^3 + \right. \\ \left. + 2I_{\pi} f_{\kappa} \beta \omega^2 + I_{\pi} c_{\kappa} \beta^2 + I_{\pi} c_{\kappa} \omega^2 \right); \quad (1.65)$$

$$k_{\dot{\phi}} = \frac{1}{k_y k_c} \left(-4I_{\pi} I_{\kappa} \beta^3 + 4I_{\pi} I_{\kappa} \beta \omega^2 - 3I_{\pi} f_{\kappa} \beta^2 + I_{\pi} f_{\kappa} \omega^2 - 2I_{\pi} c_{\kappa} \beta \right). \quad (1.66)$$

При $\beta = 0$ соотношения (1.65) и (1.66) вырождаются в соотношения (1.61) и (1.62). На рис. 1.11 приведены кривые, построенные с помощью соотношений (1.65) и (1.66) при изменении ω от нуля до бесконечности и при различных значениях $\beta < 0$. При некотором $\beta^* < 0$ линии равной степени устойчивости стягиваются в прямую линию параллельную оси абсцисс и отстоящую от нее на расстоянии $k_{\phi}^* = 50$. При нахождении рабочей точки системы на этой прямой система обладает максимальной степенью устойчивости.

Для отыскания величины максимальной степени устойчивости β^* следует учесть, что при нахождении рабочей точки системы на прямой максимальной степени устойчивости величина k_{ϕ}^* не изменяется при изменении ω . Приравняем нулю совокупность слагаемых в правой части соотношения (1.66), содержащих ω^2

$$4I_{\pi} I_{\kappa} \beta^* \omega^2 + I_{\pi} f_{\kappa} \omega^2 = 0.$$

Из последнего соотношения получаем

$$\beta^* = -\frac{f_{\kappa}}{4I_{\kappa}} = -14 \text{ с}^{-1}.$$

1.5. Об устойчивости по первому приближению

Рассмотрим однородное нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее возмущенное движение объекта управления, положив в уравнении (1.19) $F(t) = 0$

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t)] + BU(t). \quad (1.67)$$

Предположим также, что автоматический регулятор реализует линейный закон управления (1.21). Подставляя (1.21) в правую часть (1.67), получаем математическую модель возмущенного движения замкнутой системы управления

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t)] + BS(\alpha)X(t). \quad (1.68)$$

Уравнение (1.56) назовем уравнением первого приближения по отношению к исходному нелинейному уравнению (1.68).

Если вектор-функция $\Phi[X(t)]$ является аналитической, компоненты которой допускают разложения в ряды Тейлора относительно нулевого состояния установившегося равновесия, то для исследования устойчивости этого состояния используют теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [56].

Теорема 1. Если все корни характеристического уравнения (1.54) системы первого приближения (1.56) имеют отрицательные действительные части, то состояние установившегося равновесия исходной нелинейной системы (1.68) является устойчивым, каковы бы ни были нелинейные члены разложения, отбрасываемые при составлении системы первого приближения.

Теорема 2. Если среди корней характеристического уравнения (1.54) системы первого приближения (1.56) имеется хотя бы один корень с положительной действительной частью, то состояние установившегося равновесия исходной нелинейной системы (1.68) неустойчиво, каковы бы ни были нелинейные члены разложения в ряды Тейлора, отбрасываемые при составлении системы первого приближения.

Теорема 3. Если характеристическое уравнение (1.54) системы первого приближения (1.56), не имея корней с положительной действительной частью, имеет хотя бы один корень с нулевой действительной частью, то невозможно сделать заключение об устойчивости состояния установившегося равновесия исходной нелинейной системы (1.68) по модели первого приближения (1.56).

Иными словами, состояние установившегося равновесия исходной нелинейной системы (1.68) является устойчивым или неустойчивым, если это же состояние устойчиво или неустойчиво для соответствующей сис-

темы первого приближения. Если же состояние установившегося равновесия системы первого приближения является нейтральным, то невозможно сделать заключение об устойчивости этого состояния для исходной нелинейной системы по модели первого приближения.

В последнем случае, а также в случае неаналитичности вектор-функции $\Phi[X(t)]$, для установления устойчивости равновесного состояния нелинейной системы (1.68) используются теоремы второго или прямого метода Ляпунова [56].

Пример 1. Рассмотрим колебательную нелинейную динамическую систему с кулоновым трением, описываемую нелинейным дифференциальным уравнением [57]

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \operatorname{sign} \dot{x}(t) + c^2 x(t) = 0. \quad (1.69)$$

С помощью замены переменных

$$x_1(t) = x(t); \quad x_2(t) = \dot{x}(t),$$

уравнение второго порядка (1.69) преобразуем к системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -c^2 x_1(t) - 2\xi \operatorname{sign} x_2(t). \end{aligned} \quad (1.70)$$

В правую часть второго уравнения системы (1.70) входит неаналитический член, поэтому для получения системы первого приближения, соответствующей исходной нелинейной системе (1.70), произведем аппроксимацию неаналитического члена аналитической функцией

$$\operatorname{sign} x_2(t) \approx th x_2(t) \approx x_2(t) - \frac{x_2^3(t)}{3}. \quad (1.71)$$

С учетом (1.71) система (1.70) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -c^2 x_1(t) - 2\xi x_2(t) + 2\xi \frac{x_2^3(t)}{3}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Система первого приближения, соответствующая исходной нелинейной системе (1.72) записывается

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -c^2 x_1(t) - 2\xi x_2(t).\end{aligned}\tag{1.73}$$

Запишем характеристическое уравнение системы первого приближения (1.73)

$$\det(Es - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ c^2 & s + 2\xi \end{vmatrix} = 0.\tag{1.74}$$

Раскрывая определитель (1.74), получаем

$$s^2 + 2\xi s + c^2 = 0.\tag{1.75}$$

Корни уравнения (1.75) равны

$$s_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - c^2}.$$

Оба корня характеристического уравнения (1.75) системы первого приближения (1.73) имеют отрицательные действительные части, следовательно, состояние устойчивости равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ исходной нелинейной системы (1.70) является устойчивым.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}(t) + 2\xi[1 - x^2(t)]\dot{x}(t) + c^2 x(t) = 0.\tag{1.76}$$

Требуется исследовать устойчивость состояния установившегося равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$ системы, возмущенное движение которой описывается уравнением (1.76).

При замене переменных $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$ дифференциальное уравнение второго порядка (1.76) представляется в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -c^2 x_1(t) - 2\xi[1 - x_1^2(t)]x_2(t).\end{aligned}\tag{1.77}$$

Система первого приближения, соответствующая нелинейной системе (1.77) записывается

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -c^2 x_1(t) - 2\xi x_2(t).\end{aligned}\tag{1.78}$$

Система (1.78) совпадает с системой (1.73), которая является устойчивой, следовательно, устойчивой является и исходная нелинейная система (1.77).

Пример 3. Пусть возмущенное движение динамической системы в окрестности состояния установившегося равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + a x_1^3(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + a x_2^3(t).\end{aligned}\tag{1.79}$$

Требуется исследовать устойчивость состояния установившегося равновесия системы (1.79).

Запишем математическую модель системы первого приближения, соответствующей исходной системе с математической моделью (1.79)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t).\end{aligned}\tag{1.80}$$

Характеристическое уравнение первого приближения (1.80) записывается

$$\det[Es - A] = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1 = 0.\tag{1.81}$$

Характеристическое уравнение (1.81) имеет два чисто мнимых корня

$$s_{1,2} = \pm j,$$

следовательно, невозможно сделать заключение об устойчивости нелинейной системы (1.79) на основании математической модели ее первого приближения (1.80).

1.6. Теоремы второго метода А. М. Ляпунова об устойчивости установившегося равновесия динамических систем

Введем понятия знакоопределенной и знакопостоянной функций. Функция переменных $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, обозначенная через $V[X(t)]$ и равная нулю только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, а во всех остальных точках n -мерного пространства R^n , имеющая один и тот же знак, называется знакоопределенной.

Функция $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, обращающаяся в нуль не только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, но и в некоторых других точках n -мерного пространства R^n , а во всех остальных точках пространства R^n сохраняющая постоянный знак, называется знакопостоянной.

Например, функция двух переменных

$$V[x_1(t), x_2(t)] = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$

обращается в нуль в единственной точке $x_1 = x_2 = 0$, а во всех остальных точках плоскости (x_1, x_2) сохраняет один и тот же положительный знак, следовательно, является определено положительной.

Функция двух переменных

$$V[x_1(t), x_2(t)] = [x_1(t) - x_2(t)]^2,$$

обращается в нуль не только в точке $x_1 = x_2 = 0$, но и во всех точках прямой $x_1(t) = x_2(t)$, является знакопостоянной положительной.

Функции, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, называются знакопеременными.

Приведем некоторые признаки знакоопределенности и знакопеременности функций:

- всякая форма нечетного порядка есть функция знакопеременная;

- знакоопределенность или знакопеременность аналитических функций определяется совокупностью членов наименьшего порядка в разложениях этих функций;
- знакоопределенная функция должна содержать все переменные, определяющие состояние системы; если какая-либо переменная отсутствует, то функция может быть только знакопостоянной;
- формы четного порядка могут быть как знакоопределенными, так и знакопеременными;
- для квадратичных форм необходимый и достаточный признак определенной положительности дает критерий Сильвестра, в соответствии с которым квадратичная форма

$$V[X(t)] = \langle X(t), KX(t) \rangle$$

определенно положительна, если определитель матрицы K и все его главные диагональные миноры положительны.

Прямой или второй метод Ляпунова сводится к построению такой функции $V[X(t)]$, полная производная которой по времени обладает некоторыми специфическими для устойчивости свойствами. Основу прямого метода Ляпунова составляют теоремы Ляпунова об устойчивости установившегося равновесия динамической системы.

Теорема 4. Если дифференциальное уравнение возмущенного движения динамической системы (1.3) таково, что можно указать знакоопределенную функцию $V[X(t, \alpha)]$, полная производная которой по времени, вычисленная в силу этого уравнения, является знакопостоянной функцией противоположного знака с $V[X(t, \alpha)]$ или тождественно равной нулю, то состояние установившегося равновесия динамической системы (1.3) является устойчивым.

Теорема 5. Если дифференциальное уравнение возмущенного движения динамической системы (1.3) таково, что можно указать знакоопределенную функцию $V[X(t, \alpha)]$, полная производная которой по времени, вычисленная в силу этого уравнения, является знакоопределенной функцией противоположного знака с $V[X(t, \alpha)]$, то всякое возмущенное движение будет асимптотически приближаться к состоянию установившегося равновесия.

Полная производная функции $V[X(t, \alpha)]$ по времени, вычисленная в силу уравнения (1.3), вычисляется по правилу дифференцирования неявных функций

$$\begin{aligned} \frac{dV[X(t, \alpha)]}{dt} &= \left\langle \frac{\partial V[X(t, \alpha)]}{\partial X(t, \alpha)}, \frac{dX(t, \alpha)}{dt} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{dV[X(t, \alpha)]}{dX(t, \alpha)}, \Phi[X(t, \alpha)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Пример 1. Исследовать устойчивость состояния установившегося равновесия $x_1 = 0, x_2 = 0$ динамической системы (1.79).

Функцию Ляпунова исследуемой системы выберем в виде определенно-положительной квадратичной формы

$$V[x_1(t), x_2(t)] = x_1^2(t) + x_2^2(t). \quad (1.83)$$

Вычислим полную производную по времени функции (1.83) в силу уравнений возмущенного движения (1.79)

$$\begin{aligned} \frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1(t)} [x_2(t) + a x_1^3(t)] + \frac{\partial V}{\partial x_2(t)} [-x_1(t) + a x_2^3(t)] = \\ &= 2x_1(t) [x_2(t) + a x_1^3(t)] + 2x_2(t) [-x_1(t) + a x_2^3(t)] = \\ &= 2a [x_1^4(t) + x_2^4(t)]. \end{aligned} \quad (1.84)$$

При $a < 0$ функция (1.84) определенно отрицательна; при $a = 0$ она тождественно равна нулю; при $a > 0$ функция (1.84) определенно-положительна, следовательно при $a < 0$ нелинейная система (1.79) асимптотически устойчива; при $a = 0$ – нейтральна, а при $a > 0$ – неустойчива.

Ранее было отмечено, что в том случае, если нелинейная динамическая система содержит неаналитические нелинейности, то устойчивость такой системы может быть оценена только лишь с помощью теории второго метода Ляпунова. Следующий пример иллюстрирует это утверждение.

Пример 2. Пусть возмущенное движение танковой пушки с электрогидравлическим усилителем в канале вертикального наведения описывается дифференциальными уравнениями (1.37) и (1.38). Статическая характеристика электронного блока стабилизации имеет вид, приведенный на рис. 1.12, и описывается следующей неаналитической зависимостью

$$u(t) = f[\sigma_\varphi(t)];$$

$$f[\sigma_\varphi(t)] = \begin{cases} U^* \operatorname{sign} \sigma_\varphi(t) & \text{при } |\sigma_\varphi(t)| < U^*; \\ \sigma_\varphi(t) & \text{при } |\sigma_\varphi(t)| > U^*, \end{cases} \quad (1.85)$$

где

$$\sigma_\varphi(t) = k_\varphi k_\Gamma \varphi(t) + k_\varphi k_c \dot{\varphi}(t). \quad (1.86)$$

Нелинейная характеристика (1.85) предотвращает замкнутую систему от «зависания» в окрестности состояния установившегося равновесия.

Пренебрегая высокочастотными колебаниями коромысла электрогидравлического усилителя, уравнение (1.36) запишем в виде

$$\beta(t) = \frac{k_e}{c_k r_0} u(t), \quad (1.87)$$

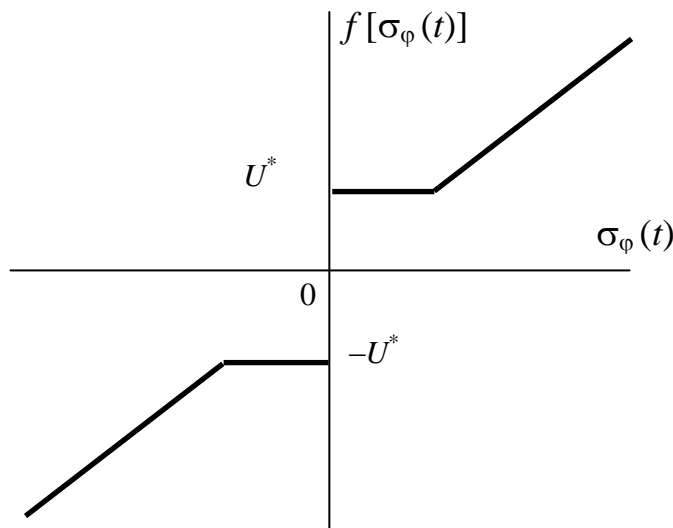


Рис. 1.12. Статическая характеристика электронного блока стабилизатора танковой пушки

Подставим соотношение (1.87) в уравнение (1.35). В результате получим дифференциальное уравнение, описывающее возмущенное движение танковой пушки в окрестности состояния установившегося равновесия

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{k_{\text{м}}k_{\text{д}}k_{\text{е}}}{I_{\text{н}}c_{\text{к}}r_{\text{о}}} u(t). \quad (1.88)$$

Вводя обозначения

$$k = \frac{k_{\text{м}}k_{\text{д}}k_{\text{е}}}{I_{\text{н}}c_{\text{к}}r_{\text{о}}};$$

$$k_1 = k_{\phi}k_{\Gamma}; \quad k_2 = k_{\dot{\phi}}k_{\text{с}}$$

получаем математическую модель возмущенного движения замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки

$$\ddot{\phi}(t) = -k f[\sigma_{\phi}(t)];$$

$$\sigma_{\phi}(t) = k_1\phi(t) + k_2\dot{\phi}(t). \quad (1.89)$$

Введем двумерный вектор состояния замкнутой системы (1.89)

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда математическая модель замкнутой системы (1.89) приводится к нормальной форме

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t);$$

$$\dot{x}_2(t) = -k f[\sigma_{\phi}(t)]; \quad (1.90)$$

$$\sigma_{\phi}(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t).$$

Функцию Ляпунова замкнутой системы (1.90) в соответствии с работой [58] выберем в виде

$$V[x_1(t), x_2(t)] = a_1 x_1^2(t) + a_2 x_2^2(t) + \int_0^{\sigma_\varphi} f[\sigma_\varphi(t)] d\sigma_\varphi(t). \quad (1.91)$$

Отыщем полную производную функции (1.91) по времени, вычисленную в схему уравнений (1.90)

$$\begin{aligned} \frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) + \frac{\partial V}{\partial \sigma_\varphi} \dot{\sigma}_\varphi(t) = \\ &= 2a_1 x_1(t)x_2(t) - 2a_2 x_2(t)kf[\sigma_\varphi(t)] + f[\sigma_\varphi(t)]k_1 x_2(t) - \\ &k_2 k f^2[\sigma_\varphi(t)] = 2a_1 x_1(t)x_2(t) - \left\{ [2a_2 k - k_1] x_2(t) f[\sigma_\varphi(t)] \right\} + \\ &+ k_2 k f^2[\sigma_\varphi(t)]. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Выберем коэффициент a_2 функции (1.91) из условия

$$2a_2 k - k_1 = 0. \quad (1.93)$$

Тогда

$$a_2 = \frac{k_1}{2k}. \quad (1.94)$$

Выполнение условия (1.93) преобразует формулу (1.92) к виду

$$\frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} = 2a_1 x_1(t)x_2(t) - k_2 k U^{*2}. \quad (1.95)$$

В окрестности состояния установившегося равновесия $x_1 = x_2 = 0$ первое слагаемое в правой части (1.95) мало и значительно меньше второго слагаемого при ограниченных значениях коэффициента a_1 .

Обозначим через $x_{1\max}$ и $x_{2\max}$ — максимальные по абсолютной величине значения переменных состояния в переходном процессе в окрестности состояния установившегося равновесия. Тогда полная производная по времени функции Ляпунова, определяемая соотношением (1.95) является знакопостоянной отрицательной функцией, если постоянная $a_1 > 0$ выбрана из условия

$$a_1 \leq \frac{k_2 k U^{*2}}{2x_{1\max} x_{2\max}}, \quad (1.96)$$

а нелинейная замкнутая система наведения и стабилизации танковой пушки является устойчивой.

Контрольные вопросы к разделу 1

1. Дайте определение динамической системы.
2. Дайте определение динамического процесса.
3. Дайте определение метрического пространства.
4. Сформулируйте три аксиомы, которым удовлетворяет расстояние между двумя точками метрического пространства.
5. Сформулируйте понятие нормы в евклидовом пространстве.
6. Что такое состояние установившегося равновесия динамической системы?
7. Определите возмущенное движение динамической системы.
8. Что такое изображающая точки и фазовая траектория в пространстве состояний?
9. Сформулируйте понятие устойчивости состояния установившегося равновесия динамической системы.
10. Сформулируйте понятие асимптотической устойчивости состояния установившегося равновесия динамической системы.
11. Запишите функционал Майера.
12. Запишите функционал Лагранжа.
13. Запишите функционал Больца.
14. Сформулируйте понятие динамического звена.
15. Что такое матричная передаточная функция динамического звена?
16. Сформулируйте понятие матричной переходной функции динамического звена.
17. Сформулируйте понятие матричной импульсной переходной функции динамического звена.
18. Что такое матричная частотная передаточная функция динамического звена?

19. Запишите выражение для матричной амплитудно-частотной характеристики динамического звена.
20. Запишите выражение для матричной фазо-частотной характеристики динамического звена.
21. Характеристическое уравнение линейной динамической системы.
22. Устойчивость линейных динамических систем.
23. Построение областей устойчивости линейных динамических систем.
24. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости состояния установившегося равновесия динамической системы.
25. Дайте определение знакоопределенной функции многих переменных.
26. Дайте определение знакопостоянной функции многих переменных.
27. Сформулируйте теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости состояния установившегося равновесия динамической системы.

Раздел 2

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Функции Ляпунова второго рода

Знакоопределенные функции $V[X(t), \alpha]$ в некоторой области пространства состояний R^n , конечные, однозначные, непрерывные и явно от времени не зависящие, будем называть функциями Ляпунова первого рода.

Рассмотрим теперь нестационарную динамическую систему

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha, t]; \quad \alpha \in R^s. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) описывает возмущенное движение динамической системы относительно невозмущенного, определяемого нулевыми значениями компонент вектора состояния $X(t)$. При исследовании устойчивости невозмущенного движения динамической системы (2.1) с помощью прямого метода Ляпунова используют функции Ляпунова второго рода явно зависящие от времени $V[X(t), \alpha, t]$. По Ляпунову функция $V[X(t), \alpha, t]$ называется знакоопределенной в области R пространства R^n , если в той же области существует определено-положительная функция первого рода $W[X(t), \alpha]$ явно от времени не зависящая, такая, что для всех

$t \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n x_i^2(t, \alpha) \leq R^n$ имеет место одно из неравенств

$$V[X(t), \alpha, t] \geq W[X(t), \alpha]$$

или

$$-V[X(t), \alpha, t] \geq W[X(t), \alpha].$$

В первом случае функция $V[X(t), \alpha, t]$ считается определено положительной, а во втором – определено отрицательной. Устойчивость не-

возмущенного движения динамической системы (2.1) определяется следующими теоремами.

Теорема 6. Если уравнение возмущенного движения динамической системы (2.1) таково, что можно найти такую знакоопределенную функцию $V[X(t), \alpha, t]$, полная производная которой по времени в силу уравнения (2.1) была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с $V[X(t), \alpha, t]$ или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение $X(t) = 0$ – устойчиво.

Теорема 7. Если уравнение возмущенного движения динамической системы (2.1) таково, что можно найти такую знакоопределенную функцию $V[X(t), \alpha, t]$, полная производная которой по времени в силу уравнения (2.1) была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с $V[X(t), \alpha, t]$, то всякое возмущенное движение, достаточно близкое в начальный момент к невозмущенному, будет асимптотически приближаться к последнему.

Пусть минимизируемый функционал для динамической системы (2.1) имеет наиболее общий вид (1.6). Для динамической системы (2.1) функцию Ляпунова представим как

$$V[X(t), \alpha, t] = \rho^2[X(T, \alpha)] + \int_t^T \rho^2[X(\tau, \alpha)] d\tau. \quad (2.2)$$

Функция (2.2) удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \Phi[X(t), \alpha, t] \right\rangle = -\rho^2[X(t, \alpha)] \quad (2.3)$$

с граничным условием

$$V[X(t), \alpha, T] = \rho^2[X(T, \alpha)], \quad (2.4)$$

существование и единственность решения которого доказана в работе [59]. Тогда значение функционала (1.6), вычисленное на решениях динамической системы (2.1), равно

$$I(\alpha) = V[X(0), \alpha, 0]. \quad (2.5)$$

Таким образом, если известно решение дифференциального уравнения в частных производных (2.3) с граничным условием (2.4), значение функционала (1.6) определяется соотношением (2.5).

Допустим, что начальные значения компонент вектора состояния динамической системы выбраны в некоторой области $G_{x0} \subset R^n$. Значение функции (2.5) определяется значениями компонент векторов $\alpha \in G_\alpha$ и $X(0) \in G_{x0}$. Потребуем, чтобы вектор $\alpha^* \in G_\alpha$ доставлял минимум функции (2.5) при наихудшем возможном сочетании компонент вектора начальных состояний динамической системы $X^*(0) \in G_{x0}$.

$$V[X(0), \alpha^*, 0] \leq V[X^*(0), \alpha^*, 0] \leq V[X^*(0), \alpha, 0]. \quad (2.6)$$

Неравенства (2.6) имеют место, если векторы $\alpha^* \in G_\alpha$ и $X^*(0) \in G_{x0}$ доставляют минимакс функции (2.5):

$$I(\alpha^*) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \max_{X(0) \in G_{x0}} V[X(0), \alpha, 0].$$

Для стационарной динамической системы (1.3) дифференциальное уравнение в частных производных для отыскания функции Ляпунова первого рода принимает вид

$$\left\langle \frac{\partial V[X(t), \alpha]}{\partial X}, \Phi[X(t), \alpha] \right\rangle = -\rho^2[X(t), \alpha]. \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.7) следует отыскивать при граничном условии

$$V[X(T), \alpha] = \rho^2[X(T), \alpha]. \quad (2.8)$$

В практических приложениях наиболее распространенная форма минимизируемого функционала – форма Лагранжа (1.5). В этом случае граничное условие (1.20) записывается так:

$$V[X(T), \alpha] = 0 \quad (2.9)$$

Вычисленные процедуры построения функций Ляпунова и поиска минимакса этих функций рассмотрены в следующем подразделе.

2.2. Параметрическая оптимизация динамических систем с сосредоточенными параметрами

Поведение динамической системы с сосредоточенными параметрами в общем случае описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением (2.1), причем вектор-функция $\Phi[X(t), \alpha, t]$ в некоторой области $G_x \subset R^n$ допускает разложение в степенной ряд

$$\begin{aligned} \Phi[X(t), \alpha, t] = & \Phi^{(1)}[X(t), \alpha, t] + \Phi^{(2)}[X(t), \alpha, t] + \\ & + \dots + \Phi^{(n)}[X(t), \alpha, t] + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Систему

$$\dot{X}(t) = \Phi^{(1)}[X(t), \alpha, t] = A(t, \alpha) X(t); \quad X(t) \in R^n; \quad \alpha \in R^s \quad (2.11)$$

назовем системой первого приближения по отношению к исходной (2.1).

Допустим, что определенно-положительная функция $\Omega[X(t, \alpha)]$, входящая в функционал

$$I(\alpha) = \int_0^T \Omega[X(t, \alpha)] dt,$$

также допускает разложение

$$\begin{aligned} \Omega[X(t, \alpha)] = & \Omega^{(2)}[X(t, \alpha)] + \Omega^{(3)}[X(t, \alpha)] + \\ & + \dots + \Omega^{(n)}[X(t, \alpha)] + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Функцию Ляпунова $V[X(t), \alpha, t]$ будем отыскивать в виде ряда

$$\begin{aligned} V[X(t), \alpha, t] = & V^{(2)}[X(t), \alpha, t] + V^{(3)}[X(t), \alpha, t] + \\ & + \dots + V^{(n)}[X(t), \alpha, t] + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставим ряды (2.10), (2.12), (2.13) в уравнение

$$\frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \Phi[X(t), \alpha, t] \right\rangle = -\Omega[X(t, \alpha)]. \quad (2.14)$$

Приравнивая члены, имеющие одинаковый порядок соответствующих форм, запишем зависимости для определения членов ряда (2.13) любого порядка $r \geq 2$ [44]:

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{dV^{(2)}[X(t), \alpha, t]}{dt}\right)_{(2.11)} = \Omega^{(2)}[X(t, \alpha)]; \\
& -\left(\frac{dV^{(3)}[X(t), \alpha, t]}{dt}\right)_{(2.11)} = \Omega^{(2)}[X(t, \alpha)] \left\langle \frac{\partial V^{(2)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \right. \\
& \quad \left. \Phi^{(2)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle + \Omega^{(3)}[X(t, \alpha)]; \\
& -\left(\frac{dV^{(4)}[X(t), \alpha, t]}{dt}\right)_{(2.11)} = \left\langle \frac{\partial V^{(3)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \Phi^{(2)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle + \\
& \quad + \left\langle \frac{\partial V^{(2)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \Phi^{(3)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle + \Omega^{(4)}[X(t, \alpha)]; \\
& \dots \\
& -\left(\frac{dV^{(r)}[X(t), \alpha, t]}{dt}\right)_{(2.11)} = \sum_{k=1}^{r-2} \left\langle \frac{\partial V^{(r-k)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \right. \\
& \quad \left. \Phi^{(k+1)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle + \Omega^{(r)}[X(t, \alpha)]; \\
& \dots \\
& V^{(2)}[X(T), \alpha, T] = 0; \quad V^{(3)}[X(T), \alpha, T] = 0; \\
& \quad \dots V^{(r)}[X(T), \alpha, T] = 0; \dots
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Уравнения (2.15) являются рекуррентными, т. е. решение каждого последующего уравнения может быть получено, если известно решение предыдущего. Запись

$$\left(\frac{dV^{(r)}[X(t), \alpha, t]}{dt} \right)_{(2.11)}$$

означает полную производную функции $V^{(r)}[X(t), \alpha, t]$ по времени, вычисленную в силу уравнения первого приближения (2.11):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV^{(r)}[X(t), \alpha, t]}{dt} \right)_{(2.11)} &= \frac{\partial V^{(r)}[X(t), \alpha, t]}{\partial t} + \\ &+ \left\langle \frac{\partial V^{(r)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, A[t, \alpha] X(t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тогда уравнения (2.15) можно в общем случае представить в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV^{(r)}[X(t), \alpha, t]}{dt} \right)_{(2.11)} &+ \sum_{k=0}^{r-2} \left\langle \frac{\partial V^{(r-k)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \Phi^{(k+1)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle + \\ &+ \Omega^{(r)}[X(t, \alpha)] = 0; \quad V^{(r)}[X(t), \alpha, T] = 0 \quad (r = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Рассмотрим первое уравнение (2.15). Пусть

$$\begin{aligned} V^{(2)}[X(t), \alpha, t] &= \langle X(t), K(t, \alpha) X(t) \rangle; \\ \Omega^{(2)}[X(t, \alpha)] &= \langle X(t), PX(t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $K(t, \alpha)$, P – квадратные симметрические матрицы. Подставляя (2.18) в первое уравнение (2.15), получаем

$$\begin{aligned} -\langle X(t), \dot{K}(t, \alpha) X(t) \rangle - 2 \langle K(t, \alpha) X(t), A(t, \alpha) X(t) \rangle &= \\ = \langle X(t), PX(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} 2 \langle K(t, \alpha) X(t), A(t, \alpha) X(t) \rangle &= \langle X(t), K(t, \alpha) A(t, \alpha) X(t) \rangle + \\ &+ \langle X(t), A^*(t, \alpha) K(t, \alpha) X(t) \rangle \end{aligned}$$

из (2.19) находим дифференциальное уравнение для определения матрицы $K(t, \alpha)$:

$$\dot{K}(t, \alpha) + K(t, \alpha) A(t, \alpha) + A^*(t, \alpha) K(t, \alpha) = -P; \quad (2.20)$$

$$K(T, \alpha) = 0.$$

Если динамическая система является стационарной, а величина T в формуле (1.5) равна бесконечности, то формы рядов (2.10) и (2.13) не зависят явно от времени, а дифференциальные уравнения (2.15) для определения коэффициентов форм ряда (2.13) вырождаются в алгебраические. При этом соотношение (2.16) и уравнение (2.20) принимает вид

$$\left(\frac{dV^{(r)}[X(t), \alpha]}{dt} \right)_{(2.11)} = \left\langle \frac{\partial V^{(r)}[X(t), \alpha]}{\partial X}, A(\alpha) X(t) \right\rangle;$$

$$K(\alpha) A(\alpha) + A^*(\alpha) K(\alpha) = -P. \quad (2.21)$$

Если из уравнения (2.20) или (2.21) определены элементы матрицы $K(t, \alpha)$ или $K(\alpha)$, то для ряда (2.13) с помощью системы (2.15) можно последовательно определить форму любого порядка $V^{(r)}[X(t), \alpha, t]$, коэффициенты которой удовлетворяют системе линейных дифференциальных или алгебраических уравнений.

Доказательство сходимости ряда (2.13), являющегося решением уравнения Ляпунова (2.14), а также рядов $\frac{dV[X(t), \alpha, t]}{dt}$ и $\frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) приведено в работе [59].

На практике ограничиваются конечным числом членов ряда (2.13). При этом решение задачи параметрической оптимизации динамической системы $\alpha^*, X^*(0)$ получается с погрешностью, определяемой отбрасываемыми членами ряда (2.13). С учетом формул (2.5), (2.13) можно записать

$$I(\alpha) = V^{(2)}[X(0), \alpha, 0] + V^{(3)}[X(0), \alpha, 0] + \dots + \\ + V^{(r)}[X(0), \alpha, 0] + R[X(0), \alpha, 0],$$

где $R[X(0), \alpha, 0]$ – отбрасываемые члены разложения функции $V[X(t), \alpha, t]$ в момент $t = 0$.

Последнее соотношение для $\alpha = \alpha^*$ и $X(0) = X^*(0)$ представим следующим образом:

$$I(\alpha^*) = \sum_{i=2}^r V^{(i)} [X^*(0) \alpha^*, 0] + R [X^*(0) \alpha^*, 0].$$

Тогда погрешность решения задачи оптимизации записывается [60, 61] так:

$$\varepsilon_R = \frac{R [X^*(0) \alpha^*, 0]}{\sum_{i=2}^r V^{(i)} [X^*(0) \alpha^*, 0]}.$$

Используя формулу Лагранжа [62], окончательно получаем

$$\varepsilon_R = \frac{\max_{X(0) \in G_{x0}} V^{(r+1)} [X^*(0) \alpha^*, 0]}{\sum_{i=2}^r V^{(i)} [X^*(0) \alpha^*, 0]}. \quad (2.22)$$

Рассмотрим динамическую колебательную систему с вязким трением, описываемую уравнением

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \dot{x}(t) + c^2 x(t) = 0, \quad (2.23)$$

где ξ – коэффициент демпфирования; c – коэффициент жесткости. Будем предполагать, что на значения этих коэффициентов наложены ограничения, которые в обобщенном виде записываются таким образом,

$$\xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}; \quad c_{\min} \leq c \leq c_{\max}, \quad (2.24)$$

чтобы на решениях уравнения (2.23) достигал минимума интегральный квадратичный функционал

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt. \quad (2.25)$$

Вводя замену переменных $x_1(t) = x(t)$; $x_2(t) = \dot{x}(t)$, уравнение (2.23) представляем в нормальной форме Коши

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = -c^2 x_1(t) - 2\xi x_2(t), \quad (2.26)$$

а функционал (2.25) запишем в виде

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt. \quad (2.27)$$

Ограничения (2.24), определяющие область G_α , представим в обобщенном виде (1.7)

$$\xi - \xi_{\max} \leq 0; \quad \xi_{\min} - \xi \leq 0; \quad c - c_{\max} \leq 0; \quad c_{\min} - c \leq 0. \quad (2.28)$$

Будем предполагать, что область G_{0x} определяется неравенствами

$$|x_1(0)| \leq x_{1\max}; \quad |x_2(0)| \leq x_{2\max},$$

которые в обобщенном виде (1.7) записываются таким образом:

$$\begin{aligned} x_1(0) - x_{1\max} &\leq 0; \quad -x_1(0) - x_{1\max} \leq 0; \\ x_2(0) - x_{2\max} &\leq 0; \quad -x_2(0) - x_{2\max} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Анализ соотношений (2.26), (2.27) позволяет записать соответствующие матрицы

$$A(\xi, c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & -2\xi \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функцию Ляпунова рассматриваемой системы будем отыскивать в виде квадратичной формы (2.18), матрица которой удовлетворяет алгебраическому уравнению (2.21). Матричное уравнение (2.21) эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$-2k_{12}c^2 = -1; \quad k_{11} - 2\xi k_{12} - k_{22}c^2 = 0; \quad 2k_{12} - 4\xi k_{22} = -1, \quad (2.30)$$

решение которой позволяет записать искомую матрицу

$$K(\xi, c) = \begin{bmatrix} \frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi} & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{1}{2c^2} & \frac{1+c^2}{4c^2\xi} \end{bmatrix}.$$

Значение функционала (2.27), вычисленное на решениях системы (2.26), равно

$$\begin{aligned} I(\xi, c) &= V[x_1(0), x_2(0), \xi, c] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi} \right) x_1^2(0) + \frac{1}{2c^2} x_1(0) x_2(0) + \frac{1+c^2}{4c^2\xi} x_2^2(0). \end{aligned}$$

Минимакс функции $V[x_1(0), x_2(0), \xi, c]$ с учетом ограничений (2.28) и (2.29) определяет оптимальные значения параметров ξ и c :

$$V[x_1^*(0), x_2^*(0), \xi^*, c^*] = \min_{\xi, c} \max_{x_1(0), x_2(0)} V[x_1(0), x_2(0), \xi, c].$$

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}(t) + \alpha [x^2(t) - 1] \dot{x}(t) + x(t) = 0. \quad (2.31)$$

Требуется выбрать такое значение параметра $\alpha \leq 0$, чтобы на решениях уравнения (2.31) достигал минимума функционал (2.25) при ограничениях (2.28), (2.29).

Переходя от уравнения (2.31) с помощью замены $x_1(t) = x(t)$; $x_2(t) = \dot{x}(t)$ к системе двух уравнений первого порядка, записываем

$$\Phi^{(1)}[X(t), \alpha] = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) + \alpha x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \Phi^{(2)}[X(t), \alpha] = 0;$$

$$\Phi^{(3)}[X(t), \alpha] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha x_1^2(t) x_2(t) \end{bmatrix}; \quad A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

В связи с тем, что $\Phi^{(2)}[X(t), \alpha] = 0$, из второго уравнения (2.15) следует, что $V^{(3)}[X(t), \alpha] = 0$, функцию $V[X(t), \alpha]$ следует отыскать в виде суммы форм второй и четвертой степени

$$\begin{aligned}
 V[X(t), \alpha] &= V^{(2)}[X(t), \alpha] + V^{(4)}[X(t), \alpha] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 k_{ij}(\alpha) x_i(t) x_j(t) + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^2 k_{ijkl}(\alpha) x_i(t) x_j(t) x_k(t) x_l(t) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[k_{11}(\alpha) x_1^2(t) + 2k_{12}(\alpha) x_1(t) x_2(t) + k_{22}(\alpha) x_2^2(t) \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left[k_{1111}(\alpha) x_1^4(t) + 4k_{2111}(\alpha) x_1^3(t) x_2(t) + \right. \\
 &\quad \left. + 6k_{2211}(\alpha) x_1^2(t) x_2^2(t) + 4k_{2221}(\alpha) x_1(t) x_2^3(t) + k_{2222}(\alpha) x_2^4(t) \right].
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Коэффициенты формы $V^{(2)}[X(t), \alpha]$ могут быть получены из матричного уравнения (2.21), которое эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned}
 -2k_{12}(\alpha) &= -1; \quad k_{11}(\alpha) + \alpha k_{12}(\alpha) - k_{22}(\alpha) = 0; \\
 2k_{12}(\alpha) + 2\alpha k_{22}(\alpha) &= -1.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Решение системы (2.33):

$$k_{11}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} - 0,5\alpha; \quad k_{12}(\alpha) = 0,5; \quad k_{22}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}.$$

Из третьего уравнения (2.15) с учетом (2.32) получаем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов формы $V^{(4)}[X(t), \alpha]$:

$$\begin{aligned}
 k_{1111}(\alpha) + \alpha k_{2111}(\alpha) - 3k_{2211}(\alpha) &= -0,5\alpha; \\
 3k_{2111}(\alpha) + 3k_{2211}(\alpha) - 3k_{2221}(\alpha) &= 1,5; \\
 3k_{2211}(\alpha) + 3k_{2221}(\alpha) - k_{2222}(\alpha) &= 0; \\
 k_{2221}(\alpha) + \alpha k_{2222}(\alpha) &= 0; \quad -k_{2111}(\alpha) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Решение системы (2.34)

$$k_{1111}(\alpha) = \frac{1,5}{\alpha} - \frac{4,5}{\alpha(3\alpha^2 + 4)} - 0,5\alpha;$$

$$k_{2111}(\alpha) = 0; \quad k_{2211}(\alpha) = \frac{0,5}{\alpha} - \frac{1,5}{\alpha(3\alpha^2 + 4)};$$

$$k_{2221}(\alpha) = -\frac{1,5}{3\alpha^2 + 4}; \quad k_{2222}(\alpha) = \frac{1,5}{\alpha(3\alpha^2 + 4)}.$$

В результате получаем значение функционала (2.27), вычисленное на решениях уравнений (2.31):

$$\begin{aligned} I = V[x_1(0), x_2(0), \alpha] = & \frac{1}{2} \left\{ - \left[\frac{1,5}{\alpha} + 0,5\alpha \right] x_1^2(0) + \right. \\ & + x_1(0), x_2(0) - \frac{1,5}{\alpha} x_2^2(0) \left. \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{1,5}{\alpha} - \frac{4,5}{\alpha(3\alpha^2 + 4)} - 0,5\alpha \right] x_1^4(0) + \right. \\ & + 6 \left[\frac{0,5}{\alpha} - \frac{1,5}{\alpha(3\alpha^2 + 4)} \right] x_1^2(0) x_2^2(0) + \\ & \left. - \frac{6}{3\alpha^2 + 4} x_1(0) x_2^3(0) + \frac{1,5}{\alpha(3\alpha^2 + 4)} x_2^4(0) \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Оптимальное значение параметра $\alpha = \alpha^*$ и $X(0) = X^*(0)$ определяется из условия минимакса функции (2.35)

$$I^* = V[x_1^*(0), x_2^*(0), \alpha^*] = \min_{\alpha} \max_{x_1(0), x_2(0)} V[x_1(0), x_2(0), \alpha].$$

Рассмотрим колебательную динамическую систему с кулоновым трением:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \operatorname{sign} \dot{x}(t) + c^2 x(t) = 0. \quad (2.36)$$

Значения параметров ξ , c следует выбрать таким образом, чтобы на решениях уравнения (2.36) достигал минимума функционал (2.35) при ограничениях (2.28) и (2.29).

Неаналитическую функцию $\text{sign } \dot{x}(t)$ аппроксимируем в окрестности состояния установившегося равновесия $x = \dot{x} = 0$ аналитической функцией – гиперболическим тангенсом

$$\text{sign } \dot{x}(t) \approx \text{th } \dot{x}(t). \quad (2.37)$$

Разлагая правую часть соотношения (2.37) в ряд Тейлора и ограничиваясь двумя первыми членами разложений, получаем

$$\text{sign } \dot{x}(t) \approx \dot{x}(t) - \frac{\dot{x}^3(t)}{3}. \quad (2.38)$$

С учетом (2.38) уравнение (2.36) принимает вид

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \left[\dot{x}(t) - \frac{\dot{x}^3(t)}{3} \right] + c^2 x(t) = 0. \quad (2.39)$$

С учетом замены $x_1(t) = x(t)$; $x_2(t) = \dot{x}(t)$ уравнение (2.39) представим в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = -c^2 x_1(t) - 2\xi x_2(t) + \frac{2\xi}{3} x_2^3(t). \quad (2.40)$$

Система первого приближения, соответствующая нелинейной системе (2.40), записывается в виде (2.36), следовательно, для определения коэффициентов формы $V^{(2)}[x_1(0), x_2(0), \xi, c]$ воспользуемся системой уравнений (2.30). Так как $\Phi^{(2)}[x_1(t), x_2(t), \xi, c] = 0$, то $V^{(3)}[x_1(0), x_2(0), \xi, c] = 0$. Рассмотрев (2.40) можно получить

$$\Phi^{(2)}[x_1(t), x_2(t), \xi, c] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\xi}{3} x_2^3(t) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Функцию Ляпунова $V[x_1(t), x_2(t), \xi, c]$ будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned}
V[x_1(t), x_2(t), \xi, c] &= V^{(2)}[x_1(t), x_2(t), \xi, c] + \\
&+ V^{(4)}[x_1(t), x_2(t), \xi, c] = \frac{1}{2} \left[k_{11} x_1^2(t) + 2k_{12} x_1(t) x_2(t) + \right. \\
&+ k_{22} x_2^2(t) \left. \right] + \frac{1}{4} \left[k_{1111} x_1^4(t) + 4k_{2111} x_1^3(t) x_2(t) + \right. \\
&+ 6k_{2211} x_1^2(t) x_2^2(t) + 4k_{2221} x_1(t) x_2^3(t) + k_{2222} x_2^4(t) \left. \right].
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Коэффициенты формы $V^{(2)}[x_1(t), x_2(t), \xi, c]$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений (2.31) и равны

$$k_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi} \right); \quad k_{12} = \frac{1}{2c^2}; \quad k_{22} = \frac{1+c^2}{4c^2\xi}. \tag{2.43}$$

Подставляя (2.40–2.42) в третье уравнение системы (2.43) и приравняв коэффициенты при одинаковых формах компонент вектора состояния, получаем систему алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов формы $V^{(4)}[x_1(t), x_2(t), \xi, c]$:

$$\begin{aligned}
k_{2111} c^2 &= 0; \quad -k_{1111} + 3k_{2211} c^2 + 2k_{2111} \xi = 0; \\
-3k_{2111} + 3k_{2221} + 6k_{2211} \xi &= 0; \\
-3k_{2211} + k_{2222} c^2 + 6k_{2221} \xi &= \frac{2}{3} k_{12} \xi; \\
-k_{2221} + 2k_{2222} \xi &= \frac{2}{3} k_{22} \xi.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Решение системы (2.44) записывается в виде

$$\begin{aligned}
k_{1111} &= \frac{c^2[c^2(1+c^2) - 4\xi^2]}{16\xi(c^2 + 3\xi^2)}; \quad k_{2111} = 0; \quad k_{2211} = \frac{c^2[(1+c^2) - 4\xi^2]}{48\xi(c^2 + 3\xi^2)}; \\
k_{2221} &= \frac{4\xi^2 - c^2[1+c^2]}{24c^2(c^2 + 3\xi^2)}; \quad k_{2222} = \frac{4\xi^2 + 3(1+c^2)(c^2 + 4\xi^2)}{48\xi c^2(c^2 + 3\xi^2)}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

С учетом (2.42), (2.43), (2.45) запишем функцию

$$\begin{aligned}
V[x_1(0), x_2(0), \xi, c] = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi} \right) x_1^2(0) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{c^2} x_1(0) x_2(0) + \frac{1+c^2}{4c^2\xi} x_2^2(0) \right] + \\
& + \frac{1}{4} \left\{ \frac{c^2[c^2(1+c^2) - 4\xi^2]}{16\xi(c^2 + 3\xi^2)} x_1^4(0) + \frac{c^2(1+c^2) - 4\xi^2}{8\xi(c^2 + 3\xi^2)} x_1^2(0) x_2^2(0) + \right. \\
& \left. + \frac{4\xi^2 + 3(1+c^2)(c^2 + 4\xi^2)}{48\xi c^2(c^2 + 3\xi^2)} x_2^4(0) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Минимум функции (2.46), вычисленный при ограничениях (2.28) и (2.29), позволяет отыскать оптимальные значения параметров ξ и c .

2.3. Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем

Под регулируемой динамической системой понимают систему, содержащую объект регулирования и автоматический регулятор (рис. 2.1). Автоматический регулятор осуществляет измерение некоторых компонент вектора состояния объекта регулирования и формирование управляющего вектора $U(t)$.

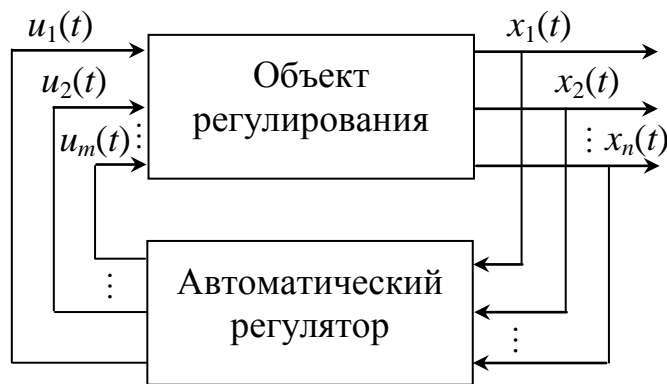


Рис. 2.1. Регулируемая динамическая система

Проблема параметрической оптимизации регулируемой динамической системы в общем случае состоит в выборе значений параметров как объекта регулирования, так и автоматического регулятора, оптимальных в смысле минимума заданного функционала.

Пусть векторное дифференциальное уравнение, описывающее поведение объекта регулирования, имеет вид

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha, t] + B(t) U(t); \quad \alpha \in R^s; \quad U(t) \in R^m, \quad (2.47)$$

где $U(t)$ – m -мерный вектор управления; $B(t)$ – прямоугольная матрица, содержащая n строк и m столбцов. С учетом соотношений (2.10), (2.11) перепишем уравнение (2.47):

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t, \alpha) X(t) + \sum_{r=2}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t] + B(t) U(t); \\ X(t) &\in R^n; \quad U(t) \in R^m. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Используя результаты теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению, покажем, что объект регулирования (2.48) можно перевести из любого заданного начального состояния $X(0) \in G_{x0}$ в любое желаемое состояние $X(T) \in G_x$ за конечный промежуток времени T , выбрав надлежащим образом компоненты вектора $U(t) \in R^m$, если матрица

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \theta(t_0, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \theta^*(t_0, \tau) d\tau \quad (2.49)$$

является положительно определенной для любых t_0, t , удовлетворяющих условиям $0 \leq t_0 \leq T$; $t = t_0 + \varepsilon_t$, где ε_t – малый отрезок времени. В (1.60) через $\theta(t_0, \tau)$ обозначена матрица $\theta(t_0, \tau) = \mathfrak{Y}(t_0) \mathfrak{Y}^{-1}(\tau)$, где $\mathfrak{Y}(t)$ – фундаментальная матрица решений однородного уравнения первого приближения (2.11).

В том случае, если динамическая система является стационарной и ее дифференциальное уравнение записывается в виде

$$\dot{X}(t) = A(\alpha) X(t) + \sum_{r=2}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha] + BU(t); \quad (2.50)$$

$$X(t) \in R^n; \quad \alpha \in R^s; \quad U(t) \in R^m,$$

то систему (2.50) с помощью вектора $U(t)$ можно перевести из любого заданного начального состояния $X(0) \in G_{x0}$ в любое желаемое состояние $X(T) \in G_x$ за конечный промежуток времени T , если ранг матрицы

$$W = [BA(\alpha) BA^2(\alpha) B \dots A^{s-1}(\alpha) B]$$

равен n , где s – степень минимального полинома матрицы $A(\alpha)$ [27].

Известные методы оптимизации регулируемых динамических систем (принцип максимума и метод динамического программирования) позволяют отыскивать оптимальные значения параметров регулятора, использующего информацию обо всех компонентах вектора состояния объекта регулирования. Однако практическая реализация такого регулятора встречает значительные, а порой и непреодолимые затруднения, связанные с необходимостью измерения всех компонент вектора состояния системы. Эти затруднения – основная причина того, что принцип максимума и метод динамического программирования до настоящего времени не нашли широкого распространения в инженерной практике.

При проектировании автоматических регуляторов разработчик, используя опыт и инженерную интуицию, обычно задает закон управления, определяющий структуру автоматического регулятора, в линейном виде

$$U(t) = S(t, \beta) X(t); \quad \beta \in R^q, \quad (2.51)$$

где $S(t, \beta)$ – матрица, содержащая m строк и n столбцов.

Через β в (2.51) обозначен вектор размерности q , компоненты которого – все коэффициенты полиномов (1.63).

Если k -й столбец матрицы $S(t, \beta)$ содержит все нулевые элементы, то это означает, что регулятор не использует k -ю компоненту вектора состояния объекта регулирования для формирования закона управления (2.51).

Подставляя (2.51) в (2.50), получаем дифференциальное уравнение замкнутой регулируемой динамической системы

$$\dot{X}(t) = [A(t, \alpha) + B(t) \cdot S(t, \beta)] X(t) + \sum_{r=2}^{\infty} \Phi^{(r)} [X(t), \alpha, t]; \quad (2.52)$$

$$X(t) \in R^n; \quad \alpha \in R^s; \quad \beta \in R^q.$$

Задача параметрической оптимизации регулируемой динамической системы состоит в выборе векторов α и β , доставляющих минимум функционалу

$$I = \int_0^T \Omega[X(t, \alpha, \beta)] dt. \quad (2.53)$$

Обычно функционал (2.53) принимают в виде

$$I = \int_0^T [\langle X(t), PX(t) \rangle + \langle U(t), RU(t) \rangle] dt. \quad (2.54)$$

Подставляя (2.51) в (2.54), получаем

$$I = \int_0^T \left\langle X(t), \left[P + S^*(t, \beta) RS(t, \beta) \right] X(t) \right\rangle dt. \quad (2.55)$$

Введем обозначения:

$$\bar{A}(t, \alpha, \beta) = A(t, \alpha) + B(t) S(t, \beta);$$

$$\bar{P}(t, \beta) = P + S^*(t, \beta) RS(t, \beta).$$

Тогда уравнение (2.52) и функционал (2.55) записываются как

$$X(t) = \bar{A}(t, \alpha, \beta) X(t) + \sum_{r=2}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t]; \quad (2.56)$$

$$X(t) \in R^n; \quad \alpha \in R^s; \quad \beta \in R^q;$$

$$I = \int_0^T \langle X(t), \bar{P}(t, \beta) X(t) \rangle dt, \quad (2.57)$$

а решение задачи параметрической оптимизации регулируемой динамической системы сводится к построению функции Ляпунова $V[X(t), \alpha, \beta, t]$ системы (2.55), удовлетворяющей уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} & \frac{V[X(t), \alpha, \beta, t]}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V[X(t), \alpha, \beta, t]}{dX}, \bar{A}(t, \alpha, \beta) X(t) \right\rangle + \\ & + \left\langle \frac{\partial V[X(t), \alpha, \beta, t]}{dX}, \sum_{r=2}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle = - \langle X(t), \bar{P}(t, \beta) X(t) \rangle. \end{aligned}$$

с граничным условием $V[X(T), \alpha, \beta, T] = 0$ и нахождению минимакса функции $V[X(0), \alpha, \beta, 0]$:

$$I(\alpha^*, \beta^*) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \min_{\beta \in G_\beta} \max_{X(0) \in G_{x0}} V[x(0), \alpha, \beta, 0].$$

Исследуем систему топливоподачи транспортного дизеля [63], поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_3(t) &= a_{32} x_2(t) + a_{33} x_3(t) + bu(t); \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$|x_1(0)| \leq x_{1\max}; \quad |x_2(0)| \leq x_{2\max}; \quad |x_3(0)| \leq x_{3\max}.$$

Будем предполагать, что регулятор реализует следующий закон управления:

$$u(t) = s x_1(t); \quad |s| \leq s_{\max}. \quad (2.59)$$

Величину s требуется выбрать из условия минимума интегрального квадратичного функционала

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{x_1(t)}{x_{1\max}} \right]^2 + \left[\frac{x_2(t)}{x_{2\max}} \right]^2 \right\} dt. \quad (2.60)$$

Подстановка (2.59) в (2.58) приводит к уравнениям замкнутой регулируемой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_3(t) &= bs x_1(t) + a_{32} x_2(t) + a_{33} x_3(t). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Функцию Ляпунова замкнутой системы (2.61) будем отыскивать в виде

$$V[X(t), s] = \frac{1}{2} \langle X(t), K(s) X(t) \rangle,$$

где $K(s)$ – квадратная симметрическая матрица размером 3×3 :

$$K(s) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) & k_{13}(s) \\ k_{12}(s) & k_{22}(s) & k_{23}(s) \\ k_{13}(s) & k_{23}(s) & k_{33}(s) \end{bmatrix}.$$

С учетом соотношений (2.60), (2.61) запишем соответствующие матрицы

$$\bar{A}(s) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ bs & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$\bar{P}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{1\max}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{2\max}^2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Коэффициенты замкнутой системы (2.61) не зависят от времени, следовательно, для отыскания элементов матрицы $K(s)$ можно воспользоваться матричным уравнением (2.21), которое для рассматриваемого примера эквивалентно системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2k_{11}(s) a_{11} + 2k_{13}(s) bs &= -\frac{1}{x_{1\max}^2}; \\ k_{11}(s) a_{12} + k_{13}(s) a_{32} + k_{12}(s) a_{11} + k_{23}(s) bs &= 0; \\ k_{12}(s) + k_{13}(s) (a_{11} + a_{33}) + k_{33}(s) bs &= 0; \\ 2k_{12}(s) a_{12} + 2k_{23}(s) a_{32} &= -\frac{1}{x_{2\max}^2}; \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$k_{22}(s) + k_{23}(s) a_{33} + k_{13}(s) a_{12} + k_{33}(s) a_{32} = 0;$$

$$k_{23}(s) + k_{33}(s) a_{33} = 0.$$

С учетом обозначений

$$-\frac{b}{2} \left[\frac{1}{x_{2\max}^2 a_{12}} + \frac{a_{12}}{x_{1\max}^2 a_{11} a_{13}} + \frac{a_{11}}{x_{2\max}^2 a_{12} a_{33}} \right] = \alpha;$$

$$-\frac{a_{32}}{2x_{1\max}^2 a_{11}} = \beta; \quad \frac{a_{12} b^2}{a_{11} a_{33}} = \gamma;$$

$$b \left[a_{32} \left(\frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{33}} \right) - (a_{11} + a_{33}) \right] = \delta;$$

$$a_{32} (a_{11} + a_{33}) - \frac{a_{32}^2}{a_{12}} = \mu; \quad -\frac{b}{x_{2\max}^2 a_{11}} = \xi;$$

$$-\frac{(a_{11} + a_{33}) a_{12}}{2x_{1\max}^2 a_{11}} - \frac{(a_{11} + a_{33}) a_{11} - a_{32}}{2x_{2\max}^2 a_{13}} = \zeta$$

решения системы (2.62) представим в виде

$$k_{11}(s) = \frac{\beta}{a_{32}} \frac{(\alpha s + \beta) b s}{(\gamma s^2 + \delta s + \mu) a_{11}};$$

$$k_{22}(s) = \frac{\xi a_{11}}{b a_{12}} - \frac{(\xi s + \zeta) a_{32}}{(\gamma s^2 + \delta s + \mu) a_{12}};$$

$$k_{13}(s) = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s^2 + \delta s + \mu};$$

$$k_{23}(s) = \frac{\left[\xi (a_{32} - a_{33}^2) - \alpha a_{12} a_{33} \right] s + (a_{32} - a_{33}^2) \zeta - \beta a_{12} a_{33}}{(\gamma s^2 + \delta s + \mu) a_{33}};$$

$$k_{23}(s) = \frac{\xi s + \zeta}{\gamma s^2 + \delta s + \mu}; \quad k_{33}(s) = -\frac{\xi s + \zeta}{(\gamma s^2 + \delta s + \mu) a_{33}}.$$

Тогда функция Ляпунова $V[X(0), s]$ запишется как

$$\begin{aligned} V[X(0), s] = & \frac{1}{2} \left[k_{11}(s) x_1^2(0) + 2k_{12}(s) x_1(0) x_2(0) + \right. \\ & + 2k_{13}(s) x_1(0) x_3(0) + k_{22}(s) x_2^2(0) + \\ & \left. + 2k_{23}(s) x_2(0) x_3(0) + k_{33}(s) x_3^2(0) \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Минимум функционала (2.63), вычисленный при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1(0) - x_{1\max} &\leq 0; \quad -x_1(0) - x_{1\max} \leq 0; \\ x_2(0) - x_{2\max} &\leq 0; \quad -x_2(0) - x_{2\max} \leq 0; \quad x_3(0) - x_{3\max} \leq 0; \\ -x_3(0) - x_{3\max} &\leq 0; \quad s - s_{\max} \leq 0; \quad -s - s_{\max} \leq 0, \end{aligned}$$

определяет оптимальное значение величины s .

Пусть поведение регулируемой динамической системы описывается уравнениями

$$\ddot{x}(t) = u(t); \quad |x(0)| \leq x_{\max}; \quad |\dot{x}(0)| \leq \dot{x}_{\max}; \quad (2.64)$$

$$u(t) = u^* \operatorname{sign}[\beta_1 x(t) + \beta_2 \dot{x}(t)]. \quad (2.65)$$

С учетом обозначений $x_1(t) = x(t)$; $x_2(t) = \dot{x}(t)$ уравнения (2.64), (2.65) запишем как систему двух уравнений первого порядка

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = u^* \operatorname{sign}[\beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)], \quad (2.66)$$

а ограничения на начальные значения компонент вектора состояния представим в виде

$$\begin{aligned} x_1(0) - x_{1\max} &\leq 0; \quad -x_1(0) - x_{1\max} \leq 0; \\ x_2(0) - x_{2\max} &\leq 0; \quad -x_2(0) - x_{2\max} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Требуется отыскать такие значения параметров β_1 и β_2 , при которых на решениях замкнутой системы (2.66) достигается минимума интегральный квадратичный функционал

$$I = \frac{1}{2} \int_t^\infty [x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt. \quad (2.68)$$

Используя формулы (2.37), (2.38), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}[\beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)] &\approx \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) - \\ &-\frac{1}{3}[\beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)]^3 = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) - \\ &-\frac{1}{3}\beta_1^3 x_1^3(t) - \beta_1^3 \beta_2 x_1^2(t) x_2(t) - \\ &-\beta_1 \beta_2^2 x_1(t) x_2^2(t) - \frac{1}{3}\beta_2^3 x_2^3(t). \end{aligned} \quad (2.69)$$

С учетом соотношений (2.66), (2.68), (2.69) сформируем соответствующие матрицы

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}; \quad A(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u^* \beta_1 & u^* \beta_2 \end{bmatrix}; \\ \Phi^{(1)}[X(t), \beta] &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u^* \beta_1 x_1(t) + u^* \beta_2 x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \Phi^{(2)}[X(t), \beta] = 0; \\ \Phi^{(3)}[X(t), \beta] &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{u^*}{3}[\beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)]^3 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого примера функцию Ляпунова $V[X(t), \beta]$ будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned} V[X(t), \beta] &= V^{(2)}[X(t), \beta] + V^{(4)}[X(t), \beta] = \\ &= \frac{1}{2} \langle X(t), K(\beta) X(t) \rangle + \frac{1}{4} [k_{1111}(\beta) x_1^4(t) + 4k_{2111}(\beta) x_1^3(t) x_2(t) + \\ &+ 6k_{2211}(\beta) x_1^2(t) x_2^2(t) + 4k_{2221}(\beta) x_1(t) x_2^3(t) + k_{2222}(\beta) x_2^4(t)], \end{aligned} \quad (2.70)$$

где $K(\beta)$ – квадратная симметрическая матрица,

$$K(\beta) = \begin{bmatrix} k_{11}(\beta) & k_{12}(\beta) \\ k_{12}(\beta) & k_{22}(\beta) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющая матричному уравнению

$$K(\beta) A(\beta) + A^*(\beta) K(\beta) = -P. \quad (2.71)$$

Система алгебраических уравнений для определения элементов матрицы $K(\beta)$, соответствующая матричному уравнению (2.71), имеет вид

$$\begin{aligned} 2k_{12}(\beta) u^* \beta_1 &= -1; \quad k_{11}(\beta) + k_{12}(\beta) u^* \beta_2 + k_{22}(\beta) u^* \beta_1 = 0; \\ 2k_{12}(\beta) + 2k_{22}(\beta) u^* \beta_2 &= -1. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Решенная система (2.72):

$$\begin{aligned} k_{11}(\beta) &= \frac{u^* (\beta_1^2 + \beta_2^2) - \beta_1}{2u^* \beta_1 \beta_2}; \\ k_{12}(\beta) &= -\frac{1}{2u^* \beta_1}; \quad k_{22}(\beta) = \frac{1 - u^* \beta_1}{2(u^*)^2 \beta_1 \beta_2}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Используя третье уравнение (2.15), с учетом формулы (2.70), получаем систему алгебраических уравнений для определения формы $V^{(4)}[X(t), \beta]$:

$$\begin{aligned} k_{2111}(\beta) &= k_{12}(\beta) \frac{\beta_1^2}{3}; \quad k_{1111}(\beta) + 3k_{2211}(\beta) u^* \beta_1 + k_{2111}(\beta) u^* \beta_2 = \\ &= \frac{u^*}{3} [3k_{12}(\beta) \beta_1^2 \beta_2 + k_{22}(\beta) \beta_1^3]; \\ 3k_{2111}(\beta) + 3k_{2221}(\beta) u^* \beta_1 + 3k_{2211}(\beta) u^* \beta_2 &= \\ &= \frac{u^*}{3} [3k_{12}(\beta) \beta_1 \beta_2^2 + 3k_{22}(\beta) \beta_1^2 \beta_2]; \\ 3k_{2211}(\beta) + k_{2222}(\beta) u^* \beta_1 + 3k_{2221}(\beta) u^* \beta_2 &= \\ &= \frac{u^*}{3} [3k_{12}(\beta) \beta_2^3 + 3k_{22}(\beta) \beta_1 \beta_2^2]; \\ k_{2221}(\beta) + k_{2222}(\beta) u^* \beta_2 &= \frac{u^*}{3} k_{22}(\beta) \beta_2^3. \end{aligned} \quad (2.74)$$

С учетом формул (2.73) находим решения системы (2.74):

$$\begin{aligned}
k_{1111}(\beta) &= \frac{\beta_1^2 (1 - u^* \beta_1)}{6u^* \beta_2} - \frac{\beta_1 \beta_2}{3} - \\
&- \frac{3\beta_1 \left[2\beta_2^3 (u^*)^2 + 2\frac{\beta_1^2}{\beta_2} - 4\beta_1 \beta_2 u^* - \frac{\beta_1^3}{\beta_2} u^* - \beta_1 \beta_2^2 u^* \right]}{2u^* (12\beta_1 - 9u^* \beta_2^2)} + \\
&+ \frac{\beta_1 \beta_2 (u^*)^2}{2u^* (12\beta_1 - 9u^* \beta_2^2)}; \quad k_{2111}(\beta) = -\frac{\beta_1}{6u^*}; \\
k_{2211}(\beta) &= \frac{2\beta_2^3 (u^*)^2 \cdot 2\frac{\beta_1^2}{\beta_2} - 4\beta_1 \beta_2 u^* - \frac{\beta_1^3}{\beta_2} u^*}{2(u^*)^2 (12\beta_1 - 9u^* \beta_2^2)} - \\
&- \frac{\beta_1 \beta_2^2 u^* + \beta_1^2 \beta_2^2 (u^*)^2}{2(u^*)^2 (12\beta_1 - 9u^* \beta_2^2)}; \\
k_{2221}(\beta) &= \frac{6\beta_1 + \frac{\beta_2^4}{\beta_1} (u^*)^2 - 5\beta_2^2 u^* - 3\beta_1^2 u^* + 2\beta_1 \beta_2^2 (u^*)^2}{2(u^*)^2 (12\beta_1 - 9u^* \beta_2^2)}; \\
k_{2222}(\beta) &= \frac{(1 - u^* \beta_1) \beta_2}{6\beta_1 (u^*)^2} - \\
&- \frac{6\beta_1 + \frac{\beta_2^4}{\beta_1} (u^*)^2 - 5\beta_2^2 u^* - 3\beta_1^2 u^* + 2\beta_1 \beta_2^2 (u^*)^2}{2(u^*)^2 \beta_2 (12\beta_1 - 9u^* \beta_2^2)}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Подставляя формулы (2.73), (2.75) в соотношение (2.70), получаем выражение для функции Ляпунова $V[X(t), \beta]$. Оптимальный вектор β , до-

ставляющий минимум функционалу (2.68), может быть найден из условия минимакса функции $V[X(0), \beta]$:

$$I^* = \min_{\beta} \max_{X(0) \in G_{x0}} V[X(0), \beta].$$

2.4. Проектирование грубых динамических систем

В процессе изготовления и сборки, а также эксплуатации любой технической системы значения ее параметров отклоняются от номинальных. При этом в той или иной степени изменяются динамические характеристики системы. Динамическую систему будем называть грубой, если случайное изменение ее параметров не приводит к существенному изменению динамических характеристик системы. Для проектирования грубых динамических систем используют аппарат теории чувствительности [18]. Основные задачи, рассматриваемые в теории чувствительности – анализ влияния малых отклонений конструктивных параметров и внешних условий работы на динамическую систему, а также проектирование динамических систем, малочувствительных к изменению этих факторов. Таким образом, если в классической постановке задач проектирования динамических систем основным требованием является устойчивость и качество их работы, то применение методов теории чувствительности позволяет проектировать динамические системы, обладающие еще одним важным свойством – малым реагированием на неизбежные флуктуации конструктивных параметров и внешней обстановки функционирования системы.

Пусть уравнение возмущенного движения динамической системы имеет вид (1.3). Введем в рассмотрение матрицу чувствительности

$$S(t, \alpha) = \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha_s} \\ \frac{\partial x_2(t, \alpha)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2(t, \alpha)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_2(t, \alpha)}{\partial \alpha_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n(t, \alpha)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_n(t, \alpha)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial x_n(t, \alpha)}{\partial \alpha_s} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

элементы которой называются функциями чувствительности. Продифференцируем матрицу (2.76) по времени

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t, \alpha) &= \frac{\partial \dot{X}(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial \alpha} = \\
&= \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial X} \cdot \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial \alpha} =, \\
&= \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial X} S(t, \alpha) + \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Анализ соотношения (2.77) позволяет сделать вывод, что матрица чувствительности (2.76) удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{S}(t, \alpha) = \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial X} S(t, \alpha) + \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial \alpha} \tag{2.78}$$

с начальным условием $S(0, \alpha) = 0$. Матричное уравнение (2.78) называется уравнением чувствительности динамической системы (1.3)

Вектор

$$S_i(t, \alpha) = \frac{\partial X(t, \alpha)}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s) \tag{2.79}$$

будем называть вектором чувствительности динамической системы (1.3) по отношению к изменению параметра α_i . Вектор (2.79) удовлетворяет векторно-матричному дифференциальному уравнению

$$S_i(t, \alpha) = \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial X} S_i(t, \alpha) + \frac{\partial \Phi[X(t), \alpha, t]}{\partial \alpha_i} \tag{2.80}$$

с начальным условием $S_i(0, \alpha) = 0$.

Степень грубости динамической системы количественно будем оценивать функционалом

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^s \langle S_i(t, \alpha), N_i S_i(t, \alpha) \rangle \right) dt. \tag{2.81}$$

Обычно N_i ($i = 1, 2, \dots, s$) – единичные матрицы.

Введем расширенный $(s + 1)$ n -мерный вектор состояния динамической системы $Z(t)$:

$$Z(t) = [X(t) S_1(t) S_2(t) \dots S_s(t)]^*, \quad (2.82)$$

возмущенное движение которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \Phi [X(t), \alpha, t]; \quad X(t) \in R^n; \quad \alpha \in R^s; \\ \dot{S}_i(t, \alpha) &= \frac{\partial \Phi [X(t), \alpha, t]}{\partial X} S_i(t) + \frac{\partial \Phi [X(t), \alpha, t]}{\partial \alpha_i} \\ (i &= 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (2.83)$$

С учетом обозначения (2.82) систему (1.3), (2.83) можно представить в виде

$$\dot{Z}(t) = \Psi [Z(t), \alpha, t]; \quad Z(t) \in R^{(s+1)n}; \quad \alpha \in R^s. \quad (2.84)$$

Задача проектирования грубой динамической системы может быть сформулирована следующим образом: требуется выбрать вектор $\alpha^* \in G_\alpha \subset R^s$. Из условия минимума функционала

$$\bar{I} = \int_0^T \left(\Omega [X(t, \alpha)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \langle S_i(t, \alpha), N_i S_i(t, \alpha) \rangle \right) dt = \int_0^T \bar{\Omega} [Z(t, \alpha)] dt. \quad (2.85)$$

Таким образом, задача проектирования грубой динамической системы сводится к задаче параметрической оптимизации для расширенной системы, вектор состояния и оптимизируемый функционал которой содержат не только фазовые переменные, но также и функции чувствительности.

Рассмотрим колебательную систему, возмущенное движение которой описывается уравнением (2.23) при ограничениях на варьируемые параметры (2.24). Требуется выбрать значения коэффициента демпфирования ξ и коэффициента жесткости c из условий минимума интегрального квадратичного функционала (2.25) и грубости динамической системы по отношению к изменению коэффициента демпфирования ξ .

Рассматриваемая динамическая система является линейной, следовательно, уравнение ее возмущенного движения с учетом обозначений

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t); \\ x_2(t) &= \dot{x}(t); \end{aligned} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

можно представить так

$$\dot{X}(t) = A(\xi, c) X(t), \quad (2.86)$$

где матрица $A(\xi, c)$ записывается так:

$$A(\xi, c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & -2\xi \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение для вектора чувствительности (2.80) при подстановке в него правой части уравнения (2.86) принимает вид

$$\dot{S}(t) = A(\xi, c) S(t) + \frac{\partial A(\xi, c)}{\partial \xi} X(t). \quad (2.87)$$

С учетом обозначений

$$Z(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ S(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{A}(\xi, c) = \begin{bmatrix} A(\xi, c) & 0 \\ \frac{\partial A(\xi, c)}{\partial \xi} & A(\xi, c) \end{bmatrix}$$

получим уравнение расширенной динамической системы

$$\dot{Z}(t) = \bar{A}(\xi, c) Z(t). \quad (2.88)$$

Блочная матрица $\bar{A}(\xi, c)$ записывается

$$\bar{A}(\xi, c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c^2 & -2\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -c^2 & -2\xi \end{bmatrix}$$

Запишем аддитивный функционал (2.85) с учетом формулы (2.27):

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[x_1^2(t) + x_2^2(t) + s_1^2(t) + s_2^2(t) \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^T \langle Z(t), \bar{P}Z(t) \rangle dt,$$

где \bar{P} – единичная матрица.

Функцию Ляпунова рассматриваемой динамической системы будем отыскивать в виде квадратичной формы

$$V[Z(t, \xi, c)] = \frac{1}{2} \langle Z(t), K(\xi, c) Z(t) \rangle, \quad (2.89)$$

где квадратная симметрическая матрица $K(\xi, c)$ удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$K(\xi, c) \bar{A}(\xi, c) + \bar{A}^*(\xi, c) K(\xi, c) = -\bar{P},$$

решения которого следующие

$$k_{11}(\xi, c) = \frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) + \frac{1}{2\xi c^2};$$

$$k_{12}(\xi, c) = \frac{1}{2c^2}; \quad k_{13}(\xi, c) = \frac{1}{2c^2} - \frac{1+c^2}{8\xi^2};$$

$$k_{14}(\xi, c) = \frac{1}{4\xi c^2}; \quad k_{22}(\xi, c) = \frac{1+c^2}{4\xi c^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right);$$

$$k_{23}(\xi, c) = -\frac{1}{4\xi c^2}; \quad k_{24}(\xi, c) = -\frac{1+c^2}{4\xi^2 c^2};$$

$$k_{33}(\xi, c) = \frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi}; \quad k_{34}(\xi, c) = \frac{1}{2c^2}; \quad k_{44}(\xi, c) = \frac{1+c^2}{4\xi c^2}.$$

Начальные значения компонент вектора чувствительности равны нулю $s_1(0) = 0$; $s_2(0) = 0$, следовательно, функция (2.89) при $t = 0$ записывается таким образом:

$$\begin{aligned}
\bar{I} &= V[Z(0), \xi, c] = V[x_1(0), x_2(0), \xi, c] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) + \frac{1}{2\xi c^2} \right] x_1^2(0) + \\
&+ \frac{1}{2c^2} x_1(0) x_2(0) + \frac{1+c^2}{8\xi c^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) x_2^2(0).
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Отыскивая минимакс функции (2.90) при ограничениях (2.28) и (2.29), получаем оптимальные значения параметров ξ и c .

2.5. Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем с микропроцессором в контуре управления

Регулируемые динамические системы с микропроцессором в контуре управления находят все более широкое применение в различных отраслях народного хозяйства. Структурная схема такой динамической системы приведена на рис. 2.2, где приняты следующие обозначения: ОР – объект регулирования; БЧЭ – блок чувствительных элементов; ИО – исполнительный орган; ПАК – преобразователь аналог – код; ВУ – вычислительное устройство; ПКА – преобразователь код – аналог.

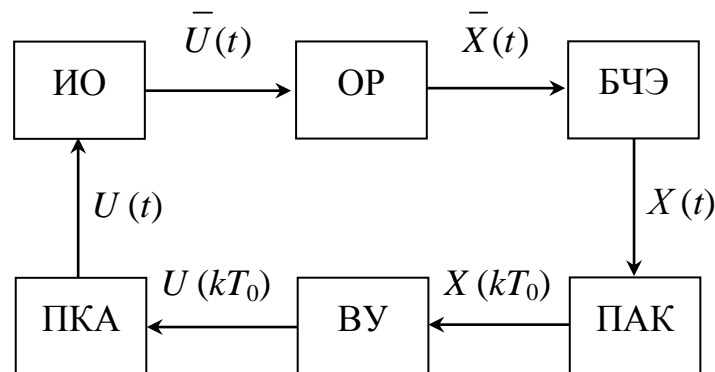


Рис. 2.2. Структурная схема регулируемой динамической системы с микропроцессором в контуре управления

Пусть возмущенное движение непрерывной части динамической системы, представляющей собой совокупность объекта регулирования, блока чувствительных элементов и исполнительных органов, описывается линейным векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = A(\alpha, t) X(t) + B(t) U(t); \quad X(t) \in R^n; \quad U(t) \in R^m; \quad \alpha \in R^s. \quad (2.91)$$

Период дискретности микропроцессора, представляющего собой совокупность вычислительного устройства и преобразователей аналог – код и код – аналог, обозначим через T_0 . Тогда уравнение, связывающее начальное состояние непрерывной части системы с конечным состоянием на каждом периоде дискретности, имеет вид [63]

$$X[(k+1) T_0] = \Phi(\alpha, k T_0) X(k T_0) + H(\alpha, k T_0) U(k T_0), \quad (2.92)$$

где матрицы $\Phi(\alpha, k T_0)$ и $H(\alpha, k T_0)$ определяются формулами

$$\Phi(\alpha, k T_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(\alpha, k T_0) T_0^i}{i!}; \quad (2.93)$$

$$H(\alpha, k T_0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(\alpha, k T_0) T_0^{i+1}}{(i+1)!} \right) B(k T_0). \quad (2.94)$$

Количество членов матричных рядов (2.93), (2.94), которые необходимо просуммировать, зависит от величины периода дискретности T_0 . Обычно с достаточной для практических задач точностью полагают

$$\Phi(\alpha, k T_0) = E + A(\alpha, k T_0) T_0; \quad (2.95)$$

$$H(\alpha, k T_0) = B(k T_0) T_0. \quad (2.96)$$

Предположим, что вычислительное устройство реализует следующий алгоритм управления:

$$U(k T_0) = S(\beta, k T_0) X(k T_0), \quad \beta \in R^q. \quad (2.97)$$

Подставляя (2.97) в (2.92) и учитывая формулы (2.95), (2.96), получаем векторно-матричное разностное уравнение замкнутой системы

$$X[(k+1)T_0] = \bar{A}(\alpha, \beta, kT_0) X(kT_0), \quad (2.98)$$

где

$$\bar{A}(\alpha, \beta, kT_0) = E + T_0 A(\alpha, kT_0) + T_0 B(kT_0) S(\beta, kT_0).$$

Требуется выбрать компоненты векторов α и β таким образом, чтобы на решениях замкнутой дискретной системы (2.96) достигал минимума функционал [29]

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^N \{ \langle X(kT_0), PX(kT_0) \rangle + \langle U(kT_0), RU(kT_0) \rangle \} = \\ &= \sum_{k=0}^N \langle X(kT_0), \bar{P}(\beta, kT_0) X(kT_0) \rangle, \end{aligned} \quad (2.99)$$

где матрица $\bar{P}(\beta, kT_0)$ определяется соотношением

$$\bar{P}(\beta, kT_0) = P + S^*(\beta, kT_0) RS(\beta, kT_0). \quad (2.100)$$

Функцию Ляпунова замкнутой динамической системы с микропроцессором в контуре управления будем отыскивать в виде

$$V[X(kT_0), \alpha, \beta, kT_0] = \langle X(kT_0), K(\alpha, \beta, kT_0) X(kT_0) \rangle. \quad (2.101)$$

Функция Ляпунова (2.101) удовлетворяет уравнению

$$\Delta V[X(kT_0), \alpha, \beta, kT_0] = - \langle X(kT_0), \bar{P}(\beta, kT_0) X(kT_0) \rangle, \quad (2.102)$$

являющемуся дискретным аналогом уравнения Ляпунова (2.3), левая часть которого представляет собой первую разность функции Ляпунова (2.101):

$$\begin{aligned} \Delta V[X(kT_0), \alpha, \beta, kT_0] &= \frac{1}{T_0} V\{X[(k+1)T_0], \alpha, \beta, (k+1)T_0\} - \\ &- \frac{1}{T_0} V[X(kT_0), \alpha, \beta, kT_0] = \\ &= \frac{1}{T_0} \langle X[(k+1)T_0], K[(\alpha, \beta, (k+1)T_0) X[(k+1)T_0]] \rangle - \\ &- \frac{1}{T_0} \langle X(kT_0), K(\alpha, \beta, kT_0) X(kT_0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Первая разность функции Ляпунова (2.103), вычисленная в силу уравнения замкнутой системы (2.98), записывается в виде

$$\begin{aligned}
& \Delta V [X(k T_0), \alpha, \beta, k T_0] = \\
& = \frac{1}{T_0} \langle \bar{A}(\alpha, \beta, k T_0) X(k T_0), K[\alpha, \beta, (k+1) T_0] \bar{A}(\alpha, \beta, k T_0) X(k T_0) \rangle - \\
& \quad - \frac{1}{T_0} \langle X(k T_0), K(\alpha, \beta, k T_0) X(k T_0) \rangle = \\
& = \frac{1}{T_0} \langle X(k T_0), \bar{A}^*(\alpha, \beta, k T_0) K[\alpha, \beta, (k+1) T_0] \bar{A}(\alpha, \beta, k T_0) X(k T_0) \rangle - \\
& \quad - \frac{1}{T_0} \langle X(k T_0), K(\alpha, \beta, k T_0) X(k T_0) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Подставляя (2.104) в (2.102), получаем разностное уравнение для отыскания матриц $K(\alpha, \beta, k T_0)$:

$$\begin{aligned}
& \bar{A}^*(\alpha, \beta, k T_0) K[\alpha, \beta, (k+1) T_0] \bar{A}(\alpha, \beta, k T_0) - \\
& \quad - K(\alpha, \beta, k T_0) = -\bar{P}(\beta, k T_0) T_0
\end{aligned} \tag{2.105}$$

с граничным условием $K(\alpha, \beta, N T_0) = 0$.

Если объект регулирования является стационарным, а матрица в алгоритме (2.97) содержит постоянные элементы, то разностное матричное уравнение (2.105) вырождается в алгебраическое

$$\bar{A}^*(\alpha, \beta) K(\alpha, \beta) \bar{A}(\alpha, \beta) - K(\alpha, \beta) = -\bar{P}(\beta) T_0. \tag{2.106}$$

После отыскания матрицы $K(\alpha, \beta, k T_0)$ или матрицы $K(\alpha, \beta)$ получаем формулу для определения значения функционала (2.24) на решениях системы (2.99)

$$I = \langle X(0), K(\alpha, \beta, 0) X(0) \rangle. \tag{2.107}$$

Оптимальные значения векторов α и β находятся из условия минимакса функции (2.107).

Рассмотрим систему топливоподачи транспортного дизеля, поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений (2.58), а алгоритм управления, реализуемый микропроцессором, имеет вид

$$u(x T_0) = s x_1(k T_0); \quad |s| \leq s_{\max}. \quad (2.108)$$

Константу s алгоритма (2.108) требуется выбрать из условия минимума квадратичного функционала

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{x_1(k T_0)}{x_{1\max}} \right)^2 + \left(\frac{x_2(k T_0)}{x_{2\max}} \right)^2 \right]. \quad (2.109)$$

Запишем соответствующие матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix};$$

$$S = [s \ 0 \ 0];$$

$$\bar{A}(s) = \begin{bmatrix} 1 + a_{11}T_0 & a_{12}T_0 & 0 \\ 0 & 1 & T_0 \\ bsT_0 & a_{32}T_0 & 1 + a_{33}T_0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{1\max}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{2\max}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу $K(s)$ функции Ляпунова рассматриваемой системы представим в виде

$$K(s) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) & k_{13}(s) \\ k_{12}(s) & k_{22}(s) & k_{23}(s) \\ k_{13}(s) & k_{23}(s) & k_{33}(s) \end{bmatrix}.$$

Если при составлении системы алгебраических уравнений для определения матрицы $K(s)$ отбросить члены, содержащие величину T_0^2 , вследствие их малости, то эта система принимает вид

$$\begin{aligned}
2k_{11}(s) a_{11} + 2k_{13}(s) bs &= -\frac{1}{x_{1\max}^2}; \\
k_{11}(s) a_{12} + 2k_{12}(s) a_{11} + k_{13}(s) a_{32} + k_{23}(s) bs &= 0; \\
k_{12}(s) + k_{13}(s) (a_{11} + a_{33}) + k_{33}(s) bs &= 0; \\
2k_{12}(s) a_{12} + 2k_{23}(s) a_{32} &= -\frac{1}{x_{1\max}^2}; \\
k_{13}(s) a_{12} + k_{22}(s) + k_{23}(s) a_{33} + k_{33}(s) a_{32} &= 0; \\
k_{23}(s) + k_{33}(s) a_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Система (2.110) совпадает с системой (2.62), следовательно, в первом приближении решения задач параметрической оптимизации непрерывной и дискретной систем совпадают. Отличия возникают при учете членов более высокого порядка малости, содержащих T_0 . В этом случае система алгебраических уравнений, определяющая элементы матрицы $K(s)$, записывается в виде

$$\begin{aligned}
&2k_{11}(s, T_0) a_{11} + 2k_{13}(s, T_0) bs + k_{11}(s, T_0) a_{11}T_0 + \\
&+ 2k_{13}(s, T_0) a_{11}bs T_0 + k_{33}(s, T_0) b^2 s^2 T_0 = -\frac{1}{x_{1\max}^2}; \\
&k_{11}(s, T_0) a_{12} + k_{12}(s, T_0) a_{11} + k_{13}(s, T_0) a_{32} + \\
&+ k_{23}(s, T_0) bs + k_{11}(s, T_0) a_{12}a_{11}T_0 + k_{13}(s, T_0) a_{32} a_{11} T_0 + \\
&+ k_{13}(s, T_0) a_{12}bs T_0 + k_{33}(s, T_0) a_{32}bs T_0 = 0; \\
&k_{12}(s, T_0) + k_{13}(s, T_0) (a_{11} + a_{33}) + k_{33}(s, T_0) bs + \\
&+ k_{12}(s, T_0) a_{11} T_0 + k_{13}(s, T_0) a_{11}a_{33} T_0 + k_{23}(s, T_0) bs T_0 + \\
&+ k_{33}(s, T_0) a_{33}bs T_0 = 0; \\
&2k_{12}(s, T_0) a_{12} + 2k_{23}(s, T_0) a_{32} + k_{11}(s, T_0) a_{12}^2 T_0 + \\
&+ 2k_{13}(s, T_0) a_{32} a_{12} T_0 + k_{33}(s, T_0) a_{32}^2 T_0 = -\frac{1}{x_{2\max}^2};
\end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned}
& k_{13}(s, T_0) a_{12} + k_{22}(s, T_0) + k_{23}(s, T_0) a_{33} + k_{33}(s, T_0) a_{32} + \\
& + k_{12}(s, T_0) a_{12} T_0 + k_{13}(s, T_0) a_{33} a_{12} T_0 + k_{23}(s, T_0) a_{32} T_0 + \\
& + k_{33}(s, T_0) a_{32} a_{33} T_0 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2k_{23}(s, T_0) + 2k_{33}(s, T_0) a_{33} + k_{22}(s, T_0) T_0 + \\
& + 2k_{23}(s, T_0) a_{33} T_0 + k_{33}(s, T_0) a_{33}^2 T_0 = 0.
\end{aligned}$$

Если в уравнениях (2.111) отбросить члены, содержащие в качестве множителя величину T_0 , то получим уравнения (2.110).

Подставляя решения системы (2.111) в формулу (2.107) и отыскивая минимакс функции

$$I(s, T_0) = \langle X(0), K(s, T_0) X(0) \rangle,$$

имеем оптимальное значение величины s .

2.6. Параметрическая оптимизация динамических систем с распределенными параметрами

Динамические системы, состояние которых, кроме времени, зависит также от одной или нескольких пространственных координат, называют системами с распределенными параметрами. В каждый момент времени их состояние характеризуется векторами-функциями пространственных координат. Такие системы или процессы обычно описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Наиболее распространены в технике колебательные системы и процессы, описываемые следующими дифференциальными уравнениями в частных производных:

- уравнение поперечных колебаний струны или крутильных колебаний вала

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2(\alpha) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad (2.112)$$

- уравнение поперечных колебаний прямого стержня

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -a^2(\alpha) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}; \quad (2.113)$$

- уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} = a^2(\alpha) \left[\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right]; \quad (2.114)$$

- уравнение распространения звука в однородной среде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2} = a^2(\alpha) & \left[\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3^2} \right]; \end{aligned} \quad (2.115)$$

- уравнение распространения теплоты и диффузии в однородной среде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} = a^2(\alpha) & \left[\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.116)$$

В уравнениях (2.112)–(2.116) через α обозначен вектор варьируемых параметров.

При исследовании задач устойчивости динамических систем уравнения в частных производных приводятся к нормальной форме [26]

$$\frac{\partial U(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial t} = L_x(\alpha) U(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \quad x_i \in G_{xi}, \quad (2.117)$$

где G_{xi} – область определения переменной x_i ($i = 1, 2, \dots, n$); $U(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ – вектор, размерность которого равна наивысшему порядку производных по времени в левой части уравнения в частных произ-

водных; $L_x(\alpha)$ – матрица линейных дифференциальных операторов, характеризующих динамическую систему.

Для сокращения записи введем вектор $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^*$. Тогда последнее уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{\partial U(X, t)}{\partial t} = L_x(\alpha)U(X, t); \quad X \in G_x, \quad (2.118)$$

где G_x – область определения вектора X .

Уравнения (2.112)–(2.116) приведем к нормальной форме (2.17). Для уравнений (2.112)–(2.115) введем замену

$$u_1(X, t) = u(X, t); \quad u_2(X, t) = \frac{\partial u(X, t)}{\partial t}, \quad (2.119)$$

и вектор

$$U(X, t) = \begin{bmatrix} u_1(X, t) \\ u_2(X, t) \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицы $L_x(\alpha)$ для уравнений (2.112)–(2.115) равны соответственно

$$L_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2(\alpha) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$L_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(\alpha) \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} & 0 \end{bmatrix};$$

$$L_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2(\alpha) \left[\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2} \right] & 0 \end{bmatrix};$$

$$L_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2(\alpha) \left[\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_3^2} \right] & 0 \end{bmatrix}.$$

Для уравнения (2.115) вектор $U(x_1, x_2, x_3, t)$ и матрица $L_x(\alpha)$ одномерны,

$$U(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, x_3, t); \quad L_x(\alpha) = \left[\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_3^2} \right].$$

При рассмотрении уравнений динамических систем с распределенными параметрами необходимо задать краевые и начальные условия. Краевые условия, ограничивающие свободу перемещений динамической системы, называются геометрическими условиями, а краевые условия, налагающие ограничения на силы и моменты, которые действуют на систему, называются динамическими условиями. В общем случае граничные условия динамической системы (2.115) записываются в виде

$$L_x U(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0; \quad x_1 \in S_1; x_2 \in S_2; \dots, x_n \in S_n, \quad (2.120)$$

или $L_x U(X, t) = 0; \quad X \in S$, где L_x – матрица линейных дифференциальных операторов, характеризующих взаимодействие динамической системы с окружающей средой; S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – граница пространственной области G_{xi} ($i = 1, 2, \dots, n$); S – граница пространственной области G_x .

Кроме граничных условий (2.120), при рассмотрении уравнения (2.117) требуется задать также начальные условия

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = U_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.121)$$

или

$$U(X, 0) = U_0(X); \quad U_0(X) \in G_{u0},$$

где G_{u0} – множество допустимых векторов $U_0(X)$.

Определим матрицу линейных дифференциальных операторов L_x для уравнения (2.113) поперечных колебаний прямого стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой – свободен (рис. 2.3).

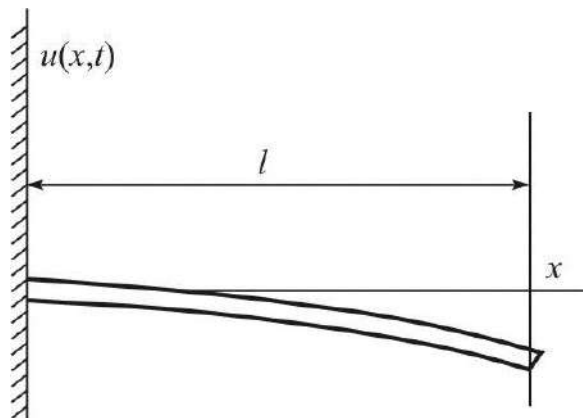


Рис. 2.3. Прямой стержень с одним закрепленным концом

Если конец стержня жестко закреплен, то на таком конце прогиб и угол поворота равны нулю:

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.122)$$

Если конец стержня свободен, то нулю равны изгибающий момент и поперечная сила, следовательно

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=I} = 0; \quad \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=I} = 0. \quad (2.123)$$

С учетом соотношений (1.122) и (2.123) представим матрицу L_x

$$L_x = \begin{bmatrix} (\cdot) \Big|_{x=0} & 0 \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \Big|_{x=0} & 0 \\ \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \Big|_{x=I} & 0 \\ \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial x^3} \Big|_{x=I} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

Качество работы динамической системы будем оценивать функционалом [64]

$$I(\alpha) = \int_0^T W[U(X, t, \alpha)] dt \quad (2.125)$$

$$\text{где } W[U(X, t, \alpha)] = \int_{G_{x1}} \int_{G_{x2}} \dots \int_{G_{xn}} \langle U(X, t, \alpha), PU(X, t, \alpha) \rangle dx_1 dx_2 \dots, dx_n.$$

Функционал (2.125) представляет собой меру отклонения возмущенного движения динамической системы (2.118) от невозмущенного $U(X, t, \alpha) = 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$V[U(X, t), \alpha, t] = \int_t^T W[U(X, t, \alpha)] dt, \quad (2.126)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dV[U(X, t), \alpha, t]}{dt} = -W[U(X, t, \alpha)] \quad (2.127)$$

при граничном условии

$$V[U(X, t), \alpha, t] = 0. \quad (2.128)$$

Из соотношений (2.62), (2.66) и (2.67) имеем

$$I(\alpha) = V[U_0(X), \alpha, 0]. \quad (2.129)$$

Функцию $V[U(X, t), \alpha, t]$ будем отыскивать в виде интегральной квадратичной формы [64]:

$$V[U(X, t), \alpha, t] = \int_{G_{x1}} \int_{G_{x2}} \dots \int_{G_{xn}} \langle U(X, t), K(X, t, \alpha) U(X, t) \rangle \times \\ \times dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (2.130)$$

где $K(X, \alpha, t)$ – квадратная симметрическая матрица, которую следует определить из условия удовлетворения уравнения (2.127) и граничного условия (2.128).

Вычислим производную функции (2.130) по времени в силу системы (2.118) и подставим ее в правую часть уравнения (2.127), в результате получим уравнение для отыскания матрицы $K(X, \alpha, t)$ [65]

$$\frac{\partial K(X, \alpha, t)}{\partial t} + \bar{L}_x K(X, \alpha, t) + K(X, \alpha, t) \bar{L}_x^* = -P \quad (2.131)$$

с граничными условиями

$$K(X, \alpha, t) = 0; \quad \bar{L}_x K(X, \alpha, t) = 0, \quad X \in S, \quad (2.132)$$

где \bar{L}_x, \bar{L}_x^* – операторы, сопряженные с операторами L_x, L_x^* .

Воспользуемся методом Фурье [66] и будем искать решение уравнения (2.118) в виде разложения

$$U(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) \Phi_i(X), \quad (2.133)$$

где $\varphi_i(t)$ неизвестные скалярные функции; $\Phi_i(X)$ – собственные вектор-функции. Подставляя (2.133) в (2.118), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t} \Phi_i(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) L_x \Phi_i(X). \quad (2.134)$$

Уравнение (2.134) удовлетворяется, если векторы $\Phi_i(X)$ и функции $\varphi_i(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$L_x(\alpha) \Phi_i(X) = \lambda_i \Phi_i(X) \quad (i = 1, 2, \dots); \quad (2.135)$$

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \lambda_i \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2.136)$$

где λ_i – некоторые постоянные величины, смысл которых будет выяснен ниже.

Ограничимся конечным числом членов разложения в (2.134)

$$U(X, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t) \Phi_i(X),$$

или в векторной форме $U(X, t) = \Phi(X) \varphi(t)$, где $\Phi(X)$ – матрица размером $m \times N$

$$\Phi_i(X) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(X) & \Phi_{12}(X) & \dots & \Phi_{1N}(X) \\ \Phi_{21}(X) & \Phi_{22}(X) & \dots & \Phi_{2N}(X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{m1}(X) & \Phi_{m2}(X) & \dots & \Phi_{mN}(X) \end{bmatrix};$$

$\varphi(t)$ – вектор,

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения (2.135), (2.136) можно записать в виде

$$L_x(\alpha) \Phi(X) = \Phi(X) \Lambda, \quad (2.137)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Lambda \varphi(t), \quad (2.138)$$

где Λ – диагональная матрица,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.137) следует решать при граничном условии

$$L_x(X) = 0; X \in S, \quad (2.139)$$

а уравнение (2.138) при граничном условии

$$\varphi(0) = \int_{G_{x1}} \int_{G_{x2}} \dots \int_{G_{xn}} \bar{\Phi}^*(X) U_0(X) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Матрица $\Phi(X)$ называется собственной матрицей краевой задачи (2.137), (2.139), матрица $\bar{\Phi}(X)$ – собственной матрицей сопряженной краевой задачи

$$\bar{L}_x \bar{\Phi}(X) = \bar{\Phi}(X) \bar{\Lambda}; \quad \bar{L}_x \bar{\Phi}[X(t)] = 0, \quad X \in S.$$

Используя результаты работы [65], матрицу $K(X, \alpha, t)$ представляем таким образом:

$$K(X, \alpha, t) = \bar{\Phi}(X) Q(\alpha, t) \bar{\Phi}^*(X), \quad (2.140)$$

где $Q(\alpha, t)$ – квадратная симметрическая матрица размером $N \times N$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dQ(\alpha, t)}{dt} = -\Lambda Q(\alpha, t) - Q(\alpha, t) \Lambda - \bar{P} \quad (2.141)$$

с конечным условием $Q(\alpha, T) = 0$, где матрица \bar{P} размером $N \times N$ равна

$$\bar{P} = \int_{G_{x1}} \int_{G_{x2}} \dots \int_{G_{xm}} \Phi^*(X) P \Phi(X) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Оптимальное значение вектора варьируемых параметров α^* выберем из условия

$$I(\alpha^*) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \max_{U_0 \in G_{u0}} V[U_0(X), \alpha, 0].$$

Решения системы (2.136) записываются в виде

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

следовательно, если среди элементов матрицы Λ есть комплексные, то решение (2.136) отыскивается в комплексной плоскости. В этом случае функция $V[U_0(X), \alpha, 0]$ представляет собой сумму действительной и мнимой частей:

$$V[U_0(X), \alpha, 0] = \text{Re } V[U_0(X), \alpha, 0] + j \text{Im } V[U_0(X), \alpha, 0].$$

Тогда вектор α^* следует выбирать из условия

$$I(\alpha^*) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \max_{U_0(X) \in G_{u0}} \text{Re } V[U_0(X), \alpha, 0].$$

Рассмотрим поперечные колебания прямого стержня длиной l , описываемые уравнением (2.113), в котором $a = \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$, где E – модуль упругости материала стержня; I – момент инерции поперечного сечения стержня

относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний; μ – погонная масса стержня. Требуется выбрать материал стержня из условия, что модуль упругости может изменяться в пределах $E_{\min} \leq E \leq E_{\max}$, а на решениях уравнения (2.113) должен достигать минимума функционал

$$I(E) = \int_0^T \int_0^l \left\{ u^2(x, t, E) + \left[\frac{\partial u(x, t, E)}{\partial t} \right]^2 \right\} dx dt. \quad (2.142)$$

Воспользовавшись обозначениями (2.119), запишем уравнение (2.113) в нормальной форме (2.137), где оператор L_x имеет вид

$$L_x(E) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(E) \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственную матрицу рассматриваемой динамической системы с учетом первых четырех тонов упругих колебаний ($N = 4$) запишем так:

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(X) & \Phi_{12}(X) & \Phi_{13}(X) & \Phi_{14}(X) \\ \Phi_{21}(X) & \Phi_{22}(X) & \Phi_{23}(X) & \Phi_{24}(X) \end{bmatrix}. \quad (2.143)$$

Тогда из матричного уравнения (2.137) получаем скалярные соотношения для определения элементов матрицы (2.143)

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(x) &= \lambda_1 \Phi_{11}(x); \quad \Phi_{22}(x) = \lambda_2 \Phi_{12}(x); \\ \Phi_{23}(x) &= \lambda_3 \Phi_{13}(x); \quad \Phi_{24}(x) = \lambda_4 \Phi_{14}(x); \\ -a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{11}(x)}{\partial x^4} &= \lambda_1 \Phi_{21}(x); \quad -a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{12}(x)}{\partial x^4} = \lambda_2 \Phi_{22}(x); \\ -a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{13}(x)}{\partial x^4} &= \lambda_3 \Phi_{23}(x); \quad -a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{14}(x)}{\partial x^4} = \lambda_4 \Phi_{24}(x). \end{aligned} \quad (2.144)$$

Подставляя первые четыре соотношения в правые части последних четырех соотношений (2.144), получаем уравнения для определения первых четырех форм колебаний стержня:

$$\begin{aligned}
a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{11}(x)}{\partial x^4} + \lambda_1^2 \Phi_{11}(x) &= 0; \\
a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{12}(x)}{\partial x^4} + \lambda_2^2 \Phi_{12}(x) &= 0; \\
a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{13}(x)}{\partial x^4} + \lambda_3^2 \Phi_{13}(x) &= 0; \\
a^2(E) \frac{\partial^4 \Phi_{14}(x)}{\partial x^4} + \lambda_4^2 \Phi_{14}(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.145}$$

Вводя обозначения

$$k_i^4 = \frac{\lambda_i^2}{a^2(E)} = \frac{\lambda_i^2 \mu}{EI}, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{2.146}$$

получим i -е уравнение системы (2.145)

$$\frac{\partial^4 \Phi_{1i}(x)}{\partial x^4} - k_i^4 \Phi_{1i}(x) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2.147}$$

Используя результаты работы [57], установим связь между величинами λ_i и собственными частотами динамической системы ω_i :

$$\lambda_i^2 = -\omega_i^2 \tag{2.148}$$

или

$$\lambda_i = j\omega_i. \tag{2.149}$$

Общие интегралы уравнений (2.147), определяющие первые четыре собственные формы колебаний стержня, имеют вид [57]

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}(x) &= A_1 \cos k_1 x + B_1 \sin k_1 x + C_1 \operatorname{ch} k_1 x + D_1 \operatorname{sh} k_1 x; \\
\Phi_{12}(x) &= A_2 \cos k_2 x + B_2 \sin k_2 x + C_2 \operatorname{ch} k_2 x + D_2 \operatorname{sh} k_2 x; \\
\Phi_{13}(x) &= A_3 \cos k_3 x + B_3 \sin k_3 x + C_3 \operatorname{ch} k_3 x + G_3 \operatorname{sh} k_3 x; \\
\Phi_{14}(x) &= A_4 \cos k_4 x + B_4 \sin k_4 x + C_4 \operatorname{ch} k_4 x + G_4 \operatorname{sh} k_4 x,
\end{aligned} \tag{2.150}$$

а уравнение для нахождения величин k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) записывается так:

$$\operatorname{ch} kl \cos kl + 1 = 0, \quad (2.151)$$

где l – длина стержня. Первые четыре корня уравнения (2.151) равны [57]

$$\begin{aligned} k_1 l &= 1,875; & k_2 l &= 4,694; \\ k_3 l &= 7,855; & k_4 l &= 10,996. \end{aligned} \quad (2.152)$$

С учетом формул (2.146), (2.148), (2.152) найдем первые четыре собственные частоты колебаний стержня

$$\begin{aligned} \omega_1(E) &= \frac{(1,875)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}; & \omega_2(E) &= \frac{(4,694)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}; \\ \omega_3(E) &= \frac{(7,855)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}; & \omega_4(E) &= \frac{(10,996)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Для отыскания первых четырех собственных форм колебаний требуется найти 16 произвольных постоянных, входящих в соотношения (2.150). С этой целью воспользуемся формулой (2.139). С учетом (2.124) и (2.143) условие (2.139) принимает вид

$$L_x \Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x)|_{x=0} & \Phi_{12}(x)|_{x=0} & \Phi_{13}(x)|_{x=0} & \Phi_{14}(x)|_{x=0} \\ \frac{\partial \Phi_{11}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} & \frac{\partial \Phi_{12}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} & \frac{\partial \Phi_{13}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} & \frac{\partial \Phi_{14}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \\ \frac{\partial^2 \Phi_{11}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} & \frac{\partial^2 \Phi_{12}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} & \frac{\partial^2 \Phi_{13}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} & \frac{\partial^2 \Phi_{14}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} \\ \frac{\partial^3 \Phi_{11}(x)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} & \frac{\partial^3 \Phi_{12}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} & \frac{\partial^3 \Phi_{13}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} & \frac{\partial^3 \Phi_{14}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.154)$$

Матричное условие (2.154) эквивалентно 16 скалярным условиям, на которых определяются 16 произвольных постоянных соотношений (2.150).

Анализ формул (2.125), (2.142) позволяет записать

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда с учетом условия ортогональности собственных форм колебаний [57]

$$\int_0^l \Phi_i(x) \Phi_k(x) dx = c \delta_{ik},$$

где δ_{ik} – символ Кронекера; c – постоянная величина, матрица \bar{P} записывается в виде

$$\bar{P} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.155)$$

Матрица $Q(t, E)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (2.141) с граничным условием

$$Q(T, E) = 0. \quad (2.156)$$

Используя метод Репина–Третьякова [66] от уравнения (2.141) с граничным условием (2.156) перейдем к уравнению

$$\frac{d\bar{Q}(t, E)}{dt} = \Lambda \bar{Q}(t, E) + \bar{Q}(t, E) \Lambda + \bar{P} \quad (2.157)$$

с начальным условием

$$\bar{Q}(0, E) = 0, \quad (2.158)$$

причем решения уравнений (2.141), (2.157) связаны зависимостью

$$\bar{Q}(t, E) = Q(T - t, E). \quad (2.159)$$

Для составления функционала (2.129) с помощью формулы (2.130) нет необходимости отыскивать матрицу $K(X, t, E)$. Достаточно найти матрицу

$$K(x, 0, E) = \Phi(x) Q(0, E) \bar{\Phi}^*(x). \quad (2.160)$$

С учетом формулы (2.159) имеем

$$Q(0, E) = \bar{Q}(T, E). \quad (2.161)$$

Отыскав решение уравнения (2.157) с начальным условием (2.158) и подставив в него $t = T$, получим искомую матрицу $Q(0, E)$.

При достаточно большом T решения уравнения (2.157) сходятся к постоянным значениям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Q}(t, E) = Q(E),$$

причем матрица $Q(E)$ с постоянными элементами удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\Lambda Q(E) + Q(E) \Lambda + \bar{P} = 0. \quad (2.162)$$

Решение уравнения (2.162) с учетом (2.155) записывается

$$Q(E) = \begin{bmatrix} -\frac{c[1+\lambda_1^2]}{2\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c[1+\lambda_2^2]}{2\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c[1+\lambda_3^2]}{2\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c[1+\lambda_4^2]}{2\lambda_4} \end{bmatrix}. \quad (2.163)$$

Перейдем к отысканию матрицы $\bar{\Phi}(x)$. Учитывая, что матрицы Λ , $\bar{\Lambda}$ для сопряженных краевых задач (2.137), (2.139) совпадают [65], а матрица-оператор \bar{L}_x равна

$$\bar{L}_x = \begin{bmatrix} 0 & -a^2(E) \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

можно установить связь между элементами матриц $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$, которая определяется соотношениями

$$\bar{\Phi}_{2i}(x) = \Phi_{1i}(x); \quad \bar{\Phi}_{1i}(x) = \Phi_{2i}(x). \quad (2.164)$$

С учетом (2.143), (2.164) можно записать матрицу $\Phi(x)$:

$$\bar{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) & \Phi_{23}(x) & \Phi_{24}(x) \\ \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) & \Phi_{13}(x) & \Phi_{14}(x) \end{bmatrix}. \quad (2.165)$$

Подставляя матрицы (2.163) и (2.164) в формулу (2.140), получаем соотношения для элементов матрицы $K(x, 0, E)$

$$\begin{aligned} k_{11}(x, 0, E) = & -\frac{c}{2} \left\{ \left[1 + \lambda_1^2(E) \right] \lambda_1(E) \Phi_{11}^2(x) + \right. \\ & + \left[1 + \lambda_2^2(E) \right] \lambda_2(E) \Phi_{12}^2(x) + \left[1 + \lambda_3^2(E) \right] \lambda_3(E) \Phi_{13}^2(x) + \\ & \left. + \left[1 + \lambda_4^2(E) \right] \lambda_4(E) \Phi_{14}^2(x); \right. \\ k_{12}(x, 0, E) = k_{21}(x, 0, E) = & -\frac{c}{2} \left\{ \left[1 + \lambda_1^2(E) \right] \Phi_{11}^2(x) + \right. \\ & + \left[1 + \lambda_2^2(E) \right] \Phi_{12}^2(x) + \left[1 + \lambda_3^2(E) \right] \Phi_{13}^2(x) + \left. \left[1 + \lambda_4^2(E) \right] \Phi_{14}^2(x) \right\}; \\ k_{22}(x, 0, E) = & -\frac{c}{2} \left\{ \frac{1 + \lambda_1^2(E)}{\lambda_1(E)} \Phi_{11}^2(x) + \frac{1 + \lambda_2^2(E)}{\lambda_2(E)} \Phi_{12}^2(x) + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \lambda_3^2(E)}{\lambda_3(E)} \Phi_{13}^2(x) + \frac{1 + \lambda_4^2(E)}{\lambda_4(E)} \Phi_{14}^2(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Анализ формул (2.166) позволяет сделать вывод, что матрица $K(x, 0, E)$ является комплексной:

$$K(x, 0, E) = \text{Re } K(x, 0, E) + j \text{Im } K(x, 0, E),$$

где

$$\text{Re } K(x, 0, E) = \begin{bmatrix} 0 & k_{12}(x, 0, E) \\ k_{21}(x, 0, E) & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, используя формулу (2.130), имеем

$$\operatorname{Re} V[U_0(x), E, 0] = \int_0^l \langle U_0(x), \operatorname{Re} K(x, 0, E) U_0(x) \rangle dx. \quad (2.167)$$

Положим

$$U_0(x) = \begin{bmatrix} u_{01}(x) \\ u_{02}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x^2 \\ \beta x^2 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \alpha \leq \alpha_{\max} \\ \beta \leq \beta_{\max} \end{matrix}. \quad (2.168)$$

С учетом формул (2.148), (2.168) соотношение (2.167) представим как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V[\alpha, \beta, E, 0] = c \alpha \beta \int_0^l \{ & [\omega_1^2(E) - 1] \Phi_{11}^2(x) + \\ & + [\omega_2^2(E) - 1] \Phi_{12}^2(x) + [\omega_3^2(E) - 1] \Phi_{13}^2(x) + \\ & + [\omega_4^2(E) - 1] \Phi_{14}^2(x) \} x^4 dx. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Значение параметра E^* определится из условия минимакса функции (2.169) при ограничениях (2.168)

$$\operatorname{Re} V[\alpha^*, \beta^*, E^*, 0] = \min_E \max_{\alpha, \beta} \operatorname{Re} V[\alpha, \beta, E, 0]$$

и составит $E^* = E_{\min}$.

2.7. Выбор критериев оптимальности в задачах параметрической оптимизации динамических систем

Одна из важнейших и самых сложных проблем параметрической оптимизации динамических систем – формализация требований к динамическим характеристикам системы и представление этих требований в виде требования минимума интегрального квадратичного функционала. Такой функционал представляет собой меру отклонения возмущенного движения динамической системы от невозмущенного и может быть ука-

зано сколько угодно таких мер, каждая из которых определяет оптимальный в смысле минимума функционала (1.5) вектор варьируемых параметров динамической системы. Обозначим через μ вектор весовых коэффициентов функционала качества (1.5), причем $\mu \in G_\mu$, где G_μ – множество допустимых векторов μ . Тогда функционал (1.5) можно описать в виде

$$I = \int_0^T \Omega[X(t, \alpha), \mu] dt. \quad (2.170)$$

В работах [22, 25, 34] вектор μ определялся из условия минимума одного или нескольких дополнительных критериев качества (γ -критериев), однако при таком подходе к проблеме выбора основного критерия остается определенный произвол в выборе дополнительных критериев.

Проблеме выбора критериев оптимальности динамических систем посвящены также работы М. Е. Салуквадзе [28, 67]. Предложенный в них метод выбора вектора μ основан на идее проектирования парето-оптимальной динамической системы. К недостатку метода Салуквадзе относится большое число вычислений, поскольку метод предполагает последовательное решение задач параметрической оптимизации динамической системы для каждой компоненты вектора μ .

В последние годы методы многокритериальной оптимизации разрабатываются А. Н. Ворониным [68–70], которые являются дальнейшим развитием методов парето-оптимального управления М. Е. Салуквадзе при наличии дополнительных условий, накладываемых на весовые коэффициенты аддитивного функционала.

В данной работе изложена методика выбора весовых коэффициентов интегрального квадратичного функционала качества, предложенная авторами [51, 71].

Рассмотрим интегральный квадратичный функционал

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^T \langle X(t, \alpha), P(\mu) X(t, \alpha) \rangle dt, \quad (2.171)$$

где μ – вектор весовых коэффициентов функционала (2.171). Обычно матрица $P(\mu)$ функционала (2.171) является диагональной

$$P(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда функционал (2.171) записывается

$$I(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n \mu_j^2 I_j(\alpha), \quad (2.172)$$

где

$$I_j(\alpha) = \int_0^T x_j^2(t, \alpha) dt; \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.173)$$

Функционалы (2.173) имеют различные размерности, следовательно, различные размерности имеют весовые коэффициенты $\mu_j, (j = \overline{1, n})$. В этой связи введем нормированные значения функционалов (2.173) и весовых коэффициентов

$$\bar{I}_j(\alpha) = \frac{1}{x_{j\max}^2} \int_0^T x_j^2(t, \alpha) dt = \frac{I_j(\alpha)}{x_{j\max}^2}; \quad (2.174)$$

$$\bar{\mu}_j = \mu_j x_{j\max}; \quad (j = \overline{1, n}), \quad (2.175)$$

где $x_{j\max}$ — максимально возможное значение компоненты $x_j(t, \alpha)$ вектора состояния $X(t, \alpha)$ в переходном процессе. Тогда аддитивный функционал (2.172) принимает вид

$$I(\alpha, \mu) = \sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j^2 \bar{I}_j(\alpha), \quad (2.176)$$

причем в соотношении (2.176) все частные функционалы $\bar{I}_j(\alpha), (j = \overline{1, n})$ имеют одинаковые размерности (секунды), а весовые коэффициенты $\bar{\mu}_j, (j = \overline{1, n})$ безразмерны.

Минимизация функционала (2.176) по $\alpha \in G_\alpha$ при заданных значениях весовых коэффициентов $\bar{\mu}_j, (j=\overline{1,n})$ не вызывает затруднений. В то же время попытка минимизации функционала (2.176) по $\bar{\mu}_j, (j=\overline{1,n})$ без ограничений на эти коэффициенты приводит к тривиальному решению $\bar{\mu}_j = 0, (j=\overline{1,n})$, при котором функционал (2.176) обращается в нуль. В этой связи на величины коэффициентов $\bar{\mu}_j, (j=\overline{1,n})$ наложим ограничение [70]

$$\sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j = 1. \quad (2.177)$$

Обозначим через $\bar{I}_j^*, (j=\overline{1,n})$ минимальные значения частных функционалов (2.173), полученные при минимизации каждого из этих функционалов в отдельности. Тогда при фиксированных значениях весовых коэффициентов $\bar{\mu}_j, (j=\overline{1,n})$ минимально возможное значение функционала (2.176) составляет

$$I(\mu) = \sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j^2 \bar{I}_j^*. \quad (2.178)$$

Отыщем минимум функционала (2.178) по $\bar{\mu}_j, (j=\overline{1,n})$ при ограничении (2.177). Для решения этой задачи на условный экстремум составим функцию Лагранжа

$$F(\bar{\mu}) = \sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j^2 \bar{I}_j^* + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j \right) \quad (2.179)$$

и запишем условия минимума (2.179)

$$\frac{\partial F(\bar{\mu})}{\partial \bar{\mu}_j} = 2\bar{\mu}_j \bar{I}_j^* - \lambda = 0; \quad (j=\overline{1,n}). \quad (2.180)$$

Из уравнений (2.180) имеем

$$2\bar{\mu}_j = \frac{\lambda}{2\bar{I}_j^*}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.181)$$

Подставим соотношения (2.181) в формулу (2.177). В результате получаем формулу для отыскания множителя Лагранжа

$$\lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{I}_i^*}}. \quad (2.182)$$

Подставляя (2.182) в (2.181), получаем

$$\bar{\mu}_j = \frac{1}{\bar{I}_j^* \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{I}_i^*}}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.183)$$

С учетом формул (2.174) и (2.175) соотношения (2.183) принимают вид

$$\mu_j = \frac{x_{j \max}}{I_j^* \sum_{i=1}^n \frac{x_{i \max}^2}{I_i^*}}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.184)$$

В качестве примера рассмотрим объект управления, возмущенное движение которого описывается уравнением

$$\ddot{\varphi}(t) = bu(t); \quad b < 0, \quad (2.185)$$

и регулятор, реализующий алгоритм управления

$$u(t) = s_1 \varphi(t) + s_2 \dot{\varphi}(t). \quad (2.186)$$

Требуется отыскать вектор варьируемых параметров

$$\alpha = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix},$$

на компоненты которого наложены ограничения

$$s_1 \leq s_{1 \max}; \quad s_2 \leq s_{2 \max}, \quad (2.187)$$

такой, чтобы на решениях замкнутой системы

$$\ddot{\varphi}(t) = b[s_1 \varphi(t) + s_2 \dot{\varphi}(t)] \quad (2.188)$$

достигал минимума интегральный квадратичный функционал

$$I(\alpha, \mu) = \int_0^T [\mu_1^2 \varphi^2(t, \alpha) + \mu_2^2 \dot{\varphi}^2(t, \alpha)] dt. \quad (2.189)$$

Вводя замену переменных $x_1(t) = \varphi(t)$; $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$, математическую модель замкнутой системы (2.188) и функционалом (2.189) представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= b[s_1 x_1(t) + s_2 x_2(t)]; \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$I(\alpha, \mu) = \int_0^T [\mu_1^2 x_1^2(t, \alpha) + \mu_2^2 x_2^2(t, \alpha)] dt. \quad (2.191)$$

Тогда соответствующие матрицы записываются

$$\begin{aligned} A + BS &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ bs_1 & bs_2 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{bmatrix}; \\ K(\alpha) &= \begin{bmatrix} k_{11}(s_1, s_2) & k_{12}(s_1, s_2) \\ k_{12}(s_1, s_2) & k_{22}(s_1, s_2) \end{bmatrix}; \quad (A + BS)^* = \begin{bmatrix} 0 & bs_1 \\ 1 & bs_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а линейное матричное уравнение (2.21) принимает следующий вид

$$K(\alpha)(A + BS) + (A + BS)^* K(\alpha) + P = 0. \quad (2.192)$$

Подставим в матричное уравнение (2.192) соответствующие матрицы

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} k_{11}(s_1, s_2) & k_{12}(s_1, s_2) \\ k_{12}(s_1, s_2) & k_{22}(s_1, s_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ bs_1 & bs_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & bs_1 \\ 1 & bs_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(s_1, s_2) & k_{12}(s_1, s_2) \\ k_{12}(s_1, s_2) & k_{22}(s_1, s_2) \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Матричное уравнение (2.193) эквивалентно трем линейным алгебраическим уравнениям относительно неизвестных элементов матрицы $K(\alpha)$:

$$\begin{aligned} 2k_{12}(s_1, s_2)bs_1 + \mu_1^2 &= 0; \\ k_{11}(s_1, s_2) + k_{12}(s_1, s_2)bs_2 + k_{22}(s_1, s_2)bs_1 &= 0; \\ 2[k_{12}(s_1, s_2) + k_{22}(s_1, s_2)bs_2] + \mu_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Решения системы алгебраических уравнений (2.194) записываются в виде

$$\begin{aligned} k_{11}(s_1, s_2) &= \frac{\mu_1^2 s_2}{s_1} + \frac{\left(\mu_2^2 - \frac{\mu_1^2}{bs_1}\right)s_1}{2s_2}; \\ k_{12}(s_1, s_2) &= -\frac{\mu_1^2}{2bs_1}; \quad k_{22}(s_1, s_2) = -\frac{\mu_2^2 - \frac{\mu_1^2}{bs_1}}{2bs_2}. \end{aligned}$$

При $b < 0$, $s_1 > 0$ и $s_2 > 0$ все элементы матрицы $k(\alpha)$ положительны. Запишем детерминант матрицы $k(\alpha)$

$$\det k(\alpha) = -\frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{4bs_1} - \frac{\left(\mu_2^2 - \frac{\mu_1^2}{bs_1}\right)s_1}{4bs_2^2} > 0.$$

Оба главных диагональных минора матрицы $k(\alpha)$ положительны, следовательно, в соответствии с критерием Сильвестра квадратичная форма

$$\begin{aligned} V[X(0), \alpha, \mu] &= k_{11}(s_1, s_2)x_1^2(0) + 2k_{12}(s_1, s_2)x_1(0)x_2(0) + \\ &+ k_{22}(s_1, s_2)x_2^2(0) \end{aligned} \quad (2.195)$$

является определенно-положительной.

Не ограничивая общности предположим, что $x_1(0) \leq x_{1\max} = 1$; $x_2(0) \leq x_{2\max} = 1$. Тогда квадратичная форма (2.195) может быть записана

$$V[\alpha, \mu] = k_{11}(s_1, s_2) + 2k_{12}(s_1, s_2) + k_{22}(s_1, s_2). \quad (2.196)$$

Подставляя в (2.196) решения системы (2.194), имеем

$$V[\alpha, \mu] = \frac{\mu_1^2 s_2}{2s_1} + \frac{\left(\mu_2^2 - \frac{\mu_1^2}{bs_1}\right)s_1}{2s_2} - \frac{\mu_1^2}{bs_1} - \frac{\mu_2^2 - \frac{\mu_1^2}{bs_1}}{2bs_2}. \quad (2.197)$$

Определенно-положительная функция (2.197) достигает минимума по α при $s_1 = s_{1\max}$ и $s_2 = s_{2\max}$.

Введем в рассмотрение частные функционалы

$$I_1(\alpha) = \int_0^T x_1^2(t, \alpha) dt; \quad I_2(\alpha) = \int_0^T x_2^2(t, \alpha) dt. \quad (2.198)$$

и отыщем их минимумы по α . Для этого введем матрицы

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда частные функционалы (2.198) равны

$$I_1(\alpha) = V[\alpha, \mu] \Big|_{\substack{\mu_1=1 \\ \mu_2=0}} = \frac{s_2}{2s_1} - \frac{1}{2bs_2} - \frac{1}{bs_1} + \frac{1}{2b^2 s_1 s_2}; \quad (2.199)$$

$$I_2(\alpha) = V[\alpha, \mu] \Big|_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_2=1}} = \frac{s_1}{2s_2} - \frac{1}{2bs_2}. \quad (2.200)$$

Частный функционал (2.199) достигает минимума при $s_1 = s_{1\max}$ и $s_2 = s_{2\max}$. При этом его минимальное значение составляет

$$I_1^* = \frac{s_{2\max}}{2s_{1\max}} - \frac{1}{2bs_{2\max}} - \frac{1}{bs_{1\max}} + \frac{1}{2b^2 s_{1\max} s_{2\max}}. \quad (2.201)$$

Функционал (2.200) достигает минимума при $s_1 = 0$ и $s_2 = s_{2\max}$, а его минимальное значение равно

$$I_2^* = \frac{1}{2bs_{2\max}}.$$

Тогда значения весовых коэффициентов аддитивного функционала (2.191), вычисленных с помощью формул (2.184), составляют

$$\mu_1 = \frac{I_2^*}{I_1^* + I_2^*}; \quad \mu_2 = \frac{I_1^*}{I_1^* + I_2^*}.$$

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Поясните различие между стационарными и нестационарными динамическими системами.
2. В чем отличие функции Ляпунова второго рода от функции Ляпунова первого рода?
3. Что мы называем невозмущенным движением динамической системы?
4. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения динамической системы.
5. Сформулируйте теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости невозмущенного движения динамической системы.
6. Запишите уравнение Ляпунова и его граничное условие.
7. Запишите связь между функционалом качества динамической системы и ее функцией Ляпунова.
8. Сформулируйте принцип минимакса для задачи параметрической оптимизации динамической системы.
9. Сформулируйте последовательность решения задачи параметрической оптимизации динамической системы с сосредоточенными параметрами.
10. Запишите линейное матричное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы квадратичной формы функции Ляпунова нестационарной динамической системы первого приближения.

11. Запишите линейное матричное алгебраическое уравнение для отыскания матрицы квадратичной формы функции Ляпунова стационарной динамической системы первого приближения.
12. Сформулируйте условие управляемости линейной регулируемой системы.
13. Сформулируйте определение грубой динамической системы.
14. Запишите матрицу чувствительности динамической системы.
15. Запишите матричное дифференциальное уравнение для матрицы чувствительности динамической системы.
16. Охарактеризуйте последовательность решения задачи параметрического синтеза грубой динамической системы.
17. Охарактеризуйте последовательность решения задачи параметрического синтеза регулируемой динамической системы с бортовой цифровой вычислительной машиной в контуре управления.
18. Дайте определение динамической системы с распределенными параметрами.
19. Запишите векторно-матричное дифференциальное уравнение возмущенного движения динамической системы с распределенными параметрами.
20. Опишите метод Фурье перехода от математической модели динамической системы в частных производных к математической модели обыкновенных дифференциальных уравнений.
21. Запишите формулу для аддитивного интегрального квадратичного функционала качества динамической системы.
22. Запишите формулу для частного интегрального квадратичного функционала качества динамической системы.
23. Запишите формулы для нормированных частных функционалов и нормированных весовых коэффициентов.
24. Охарактеризуйте метод выбора весовых коэффициентов аддитивного интегрального квадратичного функционала.

Раздел 3

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Особенности проектирования стохастических динамических систем

В предыдущих главах предполагалось, что основными причинами, вызывающими выход динамической системы из состояния установившегося равновесия, являются внешние воздействия. Область G_{x0} определяется значениями компонент вектора $X_{\max}(0)$. Допустим, что возмущенное движение динамической системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha, t] + F(t); \quad \alpha \in G_{\alpha}, \quad (3.1)$$

где $F(t)$ – вектор внешних возмущений.

Если компоненты вектора возмущения $F(t)$ – известные функции времени, то состояние динамической системы в любой момент времени однозначно определяется состоянием системы в начальный момент времени $X(0)$. Однако на практике значительно чаще встречаются воздействия, закон изменения которых носит случайный характер и не может быть заранее точно определен. При случайных воздействиях данных о состоянии системы в начальный момент времени недостаточно для того, чтобы судить о ее состоянии в последующие моменты времени.

Случайные воздействия могут прикладываться к системе извне (внешние воздействия) или возникать внутри некоторых ее элементов (внутренние шумы). Случайные изменения внутренних свойств динамической системы обычно можно свести к эквивалентному влиянию внешних возмущений, поэтому в дальнейшем будем считать, что на систему действуют только внешние случайные воздействия.

Проектирование динамической системы при наличии случайных внешних воздействий можно проводить методами, рассмотренными

выше, обеспечивая минимум функционала качества при самых неблагоприятных значениях внешних возмущений. Однако, поскольку максимальные значения внешних возмущений наблюдаются редко, к параметрам системы будут предъявляться заведомо более жесткие требования. Поэтому, хотя подобный метод иногда весьма целесообразен или даже единственно приемлем, в подавляющем большинстве случаев проектирование динамической системы при случайных воздействиях следует проводить не по максимальному, а по наиболее вероятному значению случайной величины. В этом случае получают более рациональные значения оптимизируемых параметров, хотя преднамеренно допускается ухудшение качества работы динамической системы для некоторого числа маловероятных ситуаций.

Динамические системы при случайных внешних воздействиях проектируют с использованием статистических характеристик случайных воздействий, которые, характеризуя случайные воздействия, сами по себе являются неслучайными величинами. Динамическая система, спроектированная на основе статистических методов, будет обеспечивать удовлетворение предъявляемых к ней требований не для одного определенного детерминированного воздействия, а для целой совокупности воздействий, заданных с помощью статистических характеристик.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, движение которой описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{Y}(t) = \Psi[Y(t), \alpha, t] + R(t); \quad \alpha \in G_{\alpha}, \quad (3.2)$$

где $R(t)$ – случайное внешнее воздействие с математическим ожиданием $M[R(t)]$. Невозмущенное движение динамической системы (3.2) обозначим через $Y_0(t)$. С учетом обозначений

$$Y(t) = Y_0(t) + X(t); \quad R(t) = M[R(t)] + F(t), \quad (3.3)$$

уравнение (3.2) записывается в виде

$$\dot{Y}_0(t) = \dot{X}_0(t) = \Psi[Y_0(t) + X(t), \alpha, t] + M[R(t)] + F(t). \quad (3.4)$$

Рассмотрим нелинейную вектор-функцию $\Psi[Y_0(t) + X(t), \alpha, t]$:

$$\begin{aligned}
\Psi[Y_0(t) + X(t), \alpha, t] &= \Psi[Y_0(t), \alpha, t] + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right)_{\alpha} x_i(t) + \\
&+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j} \right)_{\alpha} x_i(t) x_j(t) + \dots = \\
&= \Psi[Y_0(t), \alpha, t] + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t],
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где индекс формы r -й степени в разложении (3.5) обозначим через (r) . Подставим (3.5) в (3.4)

$$\dot{Y}_0(t) + \dot{X}(t) = \Psi[Y_0(t), \alpha, t] + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t] + M[R(t)] + F(t). \tag{3.6}$$

Уравнение

$$\dot{Y}_0(t) = \Psi[Y_0(t), \alpha, t] + M[R(t)] \tag{3.7}$$

описывает невозмущенное движение динамической системы (3.2).

Тогда уравнение возмущенного движения динамической системы принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{X}(t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t] + F(t) = \\
&= A(t, \alpha)X(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t] + F(t).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Математическое ожидание величины $F(t)$ равно нулю.

Будем предполагать, что компоненты вектора $F(t)$ представляют собой стационарные случайные функции, обладающие свойством эргодичности [72]. Предположение о свойстве эргодичности внешних возмущений позволяет отыскать их статистические характеристики при малом количестве реализаций и даже при единственной реализации на достаточно большом участке времени T .

Пусть имеются реализации всех компонент вектора $F(t)$ в интервале $[0, T]$. Разобьем интервал реализации на N равных частей длиной $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Тогда корреляционную матрицу случайного вектора $F(t)$ можно получить из следующей приближенной формулы:

$$\begin{aligned}
 R_f(\tau) &= M \left[\left\langle F(t), F^*(t + \tau) \right\rangle \right] = \\
 &= \begin{bmatrix} M[f_1(t), f_1(t + \tau)] & M[f_1(t), f_2(t + \tau)] & \dots & M[f_1(t), f_n(t + \tau)] \\ M[f_2(t), f_1(t + \tau)] & M[f_2(t), f_2(t + \tau)] & \dots & M[f_2(t), f_n(t + \tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M[f_n(t), f_1(t + \tau)] & M[f_n(t), f_2(t + \tau)] & \dots & M[f_n(t), f_n(t + \tau)] \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{N - m} \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^{N-m} f_1(l) f_1(l + m) & \sum_{l=0}^{N-m} f_1(l) f_2(l + m) & \dots & \sum_{l=0}^{N-m} f_1(l) f_n(l + m) \\ \sum_{l=0}^{N-m} f_2(l) f_1(l + m) & \sum_{l=0}^{N-m} f_2(l) f_2(l + m) & \dots & \sum_{l=0}^{N-m} f_2(l) f_n(l + m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{l=0}^{N-m} f_n(l) f_1(l + m) & \sum_{l=0}^{N-m} f_n(l) f_2(l + m) & \dots & \sum_{l=0}^{N-m} f_n(l) f_n(l + m) \end{bmatrix}, \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

где $m = \frac{\tau}{\Delta t}$.

Если в (3.9) положить $\tau = 0$ и $m = 0$, будем иметь матрицу дисперсий.

Корреляционная матрица стационарного случайного процесса $R_f(t)$ связана с матрицей спектральной плоскости $S_f(\omega)$ преобразованиями Фурье

$$R_f(\tau) = \int_0^{\infty} S_f(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \tag{3.10}$$

$$S_f(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_f(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \tag{3.11}$$

Полагая в (3.10) $\tau = 0$, запишем матрицу дисперсий

$$Q_f = S_f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_f(\tau) d\tau.$$

В дальнейшем будем предполагать, что каждая из компонент вектора внешних возмущений $F(t)$ представляет собой белый шум. Если это не так и каждая из компонент вектора $F(t)$ – произвольный гауссов случайный процесс (цветной шум), то задачу проектирования оптимальной динамической системы в этом случае приводят к задаче проектирования при воздействии на систему векторного белого шума.

Пусть $k_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – корреляционные функции компонент $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора $F(t)$, которые могут быть получены, если известно достаточное количество конкретных реализаций случайных функций $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Воспользовавшись формулой (3.11), построим спектральные плотности $S_y(\omega)$ выходного сигнала линейного динамического звена связана со спектральной плотностью и $S_x(\omega)$ его входного сигнала соотношением

$$S_y(\omega) = R^2(\omega) S_x(\omega), \quad (3.12)$$

где $R(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика динамического звена.

Если предположить, что входным сигналом динамического звена является белый шум, спектральная плотность которого постоянна, то из соотношения (3.12) следует, что $S_y(\omega) = R^2(\omega)$. Таким образом, при подаче на вход динамического звена белого шума на выходе звена имеет место случайная функция, спектральная плотность которой равна квадрату амплитудно-частотной характеристики звена. Будем считать, что каждая из компонент $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора $F(t)$ – выходной сигнал векторного формирующего динамического звена, на вход которого подан белый шум $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), причем амплитудно-частотная характеристика звена $R_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и спектральная плотность величины $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) связаны соотношением $S_i(\omega) = R_i^2(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Если спектральная плотность $S_i(\omega)$ имеет явно выраженные резонансные пики, то передаточную функцию i -го формирующего динамического звена можно представить в виде

$$W_i(p) = k_i \prod_{f=1}^{r_i} (T_{if1}^2 p^2 + T_{if2} p + 1)^{-1}, \quad (3.13)$$

где r_i – количество резонансных пиков спектральной плотности $S_i(\omega)$.

Амплитудно-частотная характеристика звена определяется соотношением

$$R_i(\omega) = k_i \prod_{f=1}^{r_i} \left[(1 - \omega^2 T_{if1}^2)^2 + \omega^2 T_{if2}^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$S_i(\omega) = k_i^2 \prod_{f=1}^{r_i} \left[(1 - \omega^2 T_{if1}^2)^2 + \omega^2 T_{if2}^2 \right]^{-1}. \quad (3.14)$$

Найдем параметры передаточной функции (3.13). Из формулы (3.14) следует, что коэффициенты усиления k_i и постоянные времени T_{if1} равны

$$k_i = \sqrt{S_i(0)}; \quad T_{if1} = \frac{1}{\omega_{pij}} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, r_i),$$

где ω_{pij} – резонансные частоты, соответствующие максимумам резонансных пиков спектральных плоскостей $S_i(\omega)$.

Постоянные времени T_{ij2} определяются из системы алгебраических уравнений

$$\prod_{j=1}^{r_i} \left[(1 - \omega_{pij}^2 T_{ij1}^2)^2 + \omega_{pij}^2 T_{ij2}^2 \right] = \frac{k_i^2}{S_i(\omega_{pij})} \\ (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r_i).$$

Запишем дифференциальные уравнения в операторной форме относительно функций $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в соответствии с (3.13)

$$\prod_{j=1}^{r_i} (T_{ij1}^2 p^2 + T_{ij2} p + 1) f_i(t) = k_i \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

С помощью соответствующей замены переменных эту систему уравнений можно привести к системе $2\sum_{i=1}^n r_i$ уравнений первого порядка относительно функций $f_i(t)$ и их производных порядка r_i . Объединяя полученные уравнения с уравнениями (3.8), получим систему дифференциальных уравнений $n + 2\sum_{i=1}^n r_i$ порядка, которую можно трактовать как систему уравнений, описывающую возмущенное движение динамической системы при воздействии на нее векторного белого шума $\xi(t)$.

Возмущенное движение объекта управления системы топливоподачи транспортного дизеля описывается уравнениями (2.59). Предположим, что на коленчатый вал дизеля действует случайное внешнее возмущение со стороны грунта $f(t)$ с корреляционной функцией, представленной на рис. 3.1. Требуется от уравнений возмущенного движения объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + cf(t); \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t);$$

$$\dot{x}_3(t) = a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3 + bu(t)$$

при воздействии на него цветного шума $f(t)$ перейти к уравнениям возмущенного движения того же объекта при действии на него белого шума.

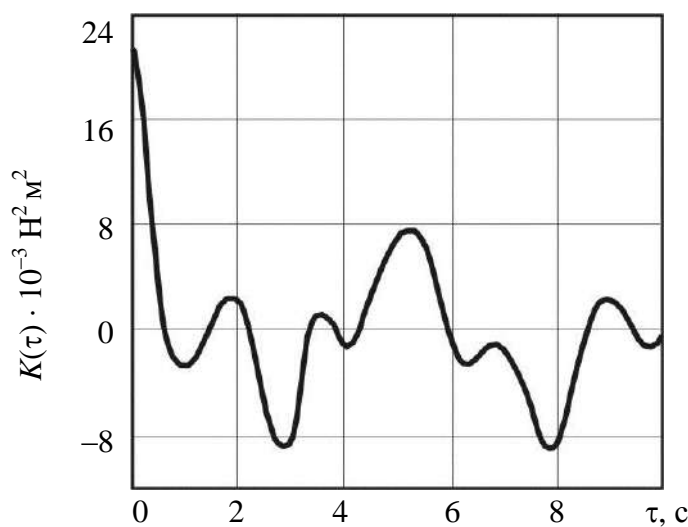


Рис. 3.1. Корреляционная функция возмущения $f(t)$

С помощью формулы (3.11) построим спектральную плотность случайной функции $f(t)$ (рис. 3.2). Кривая спектральной плотности имеет два явно выраженных максимума, следовательно, передаточную функцию формирующего динамического звена, преобразующего белый шум $\xi(t)$ в случайную функцию $f(t)$, можно представить в виде

$$W(p) = \frac{k}{(T_{11}^2 p^2 + T_{12} p + 1)(T_{21}^2 p^2 + T_{22} p + 1)}.$$

Тогда найдем аналитическое выражение для спектральной плотности случайной функции $f(t)$:

$$S_f(\omega) = \frac{k^2}{\left[(1 - \omega^2 T_{11}^2)^2 + \omega^2 T_{12}^2 \right] \left[(1 - \omega^2 T_{21}^2)^2 + \omega^2 T_{22}^2 \right]}.$$

С учетом последней формулы и анализа рис. 3.2 получаем $k = 18,17$; $T_{11} = 2,63$ с; $T_{21} = 0,82$ с. Для отыскания постоянных времени T_{12} и T_{22} запишем уравнения:

$$T_{12}^2 (0,81 + 0,1444 T_{22}^2) = 0,27;$$

$$T_{22}^2 (86,3 + 1,488 T_{12}^2) = 0,01344,$$

решения которых равны $T_{12} = 0,577$ с; $T_{22} = 0,01245$ с.

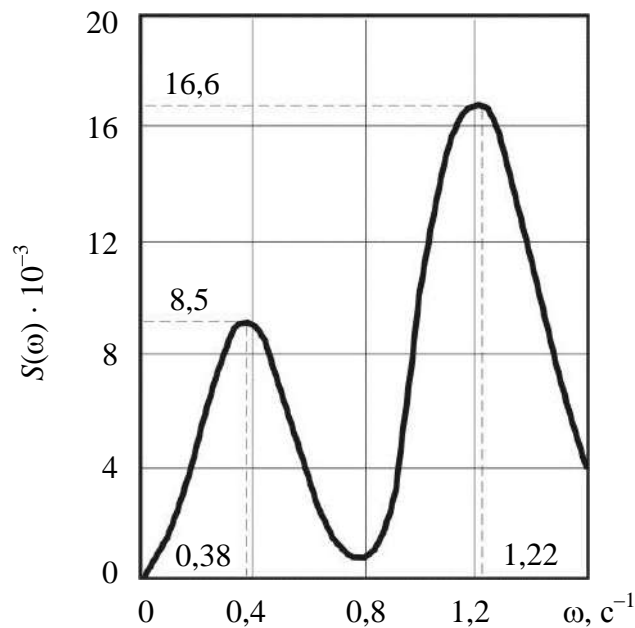


Рис. 3.2. Спектральная плотность возмущения $f(t)$

Формирующее динамическое звено можно представить в виде последовательного соединения двух колебательных динамических звеньев (рис. 3.3) с передаточными функциями

$$W_1(p) = \frac{k}{(T_{11}^2 p^2 + T_{12} p + 1)};$$

$$W_2(p) = \frac{1}{(T_{21}^2 p^2 + T_{22} p + 1)},$$

уравнения которых записываются в виде

$$T_{11}^2 \ddot{y}(t) + T_{12} \dot{y}(t) + y(t) = k\xi(t);$$

$$T_{21}^2 \ddot{f}(t) + T_{22} \dot{f}(t) + f(t) = y(t).$$

Введем расширенный вектор состояния объекта управления $Z(t)$, компоненты которого равны: $z_1(t) = x_1(t)$; $z_2(t) = x_2(t)$; $z_3(t) = x_3(t)$; $z_4(t) = y(t)$; $z_5(t) = \dot{y}(t)$; $z_6(t) = f(t)$; $z_7(t) = \dot{f}(t)$. Тогда уравнения возмущенного движения расширенного объекта управления примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= a_{11} z_1(t) + a_{12} z_2(t) + c z_6(t); & \dot{z}_2(t) &= z_3(t); \\ \dot{z}_3(t) &= a_{32} z_2(t) + a_{33} z_3(t) + b u(t); & \dot{z}_4(t) &= z_5(t); \\ \dot{z}_5(t) &= -\frac{T_{12}}{T_{11}^2} z_5(t) - \frac{1}{T_{11}^2} z_4(t) + \frac{k}{T_{11}^2} \xi(t); & \dot{z}_6(t) &= z_7(t); \\ \dot{z}_7(t) &= -\frac{T_{22}}{T_{21}^2} z_7(t) - \frac{1}{T_{21}^2} z_6(t) + \frac{1}{T_{21}^2} z_4(t). \end{aligned}$$

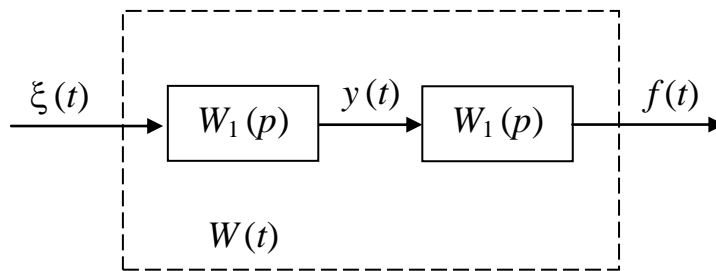


Рис. 3.3. Формирующее динамическое звено

3.2. Стохастическая оптимизация линейной динамической системы

Рассмотрим линейную динамическую систему, возмущенное движение которой описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = A(t, \alpha) X(t) + F(t); \quad \alpha \in G_\alpha, \quad (3.15)$$

где $F(t)$ – вектор белого шума с матрицей интенсивности Q_f .

Требуется отыскать вектор параметров динамической системы $\alpha^* \in G_\alpha$, доставляющий на решениях системы (3.15) минимум интегральному квадратичному функционалу

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} M \left[\int_0^T \langle X(t), PX(t) \rangle dt \right]. \quad (3.16)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V[X(t), \alpha, t] = \frac{1}{2} \int_t^T \langle X(\tau), PX(\tau) \rangle d\tau, \quad (3.17)$$

удовлетворяющую стохастическому уравнению Ляпунова [73, 74]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, A(t, \alpha) X(t) \right\rangle + \\ + 0,5 \text{Sp} \left[Q_f \frac{\partial^2 V[X(t), \alpha, t]}{\partial X \partial X} \right] = -0,5 \langle X(t), PX(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

с граничным условием

$$V[X(t), \alpha, T] = 0. \quad (3.19)$$

Сравнивая соотношения (3.16) и (3.17), получим

$$I(\alpha) = M \{ V[X(0), \alpha, 0] \}. \quad (3.20)$$

Функцию (3.17) будем отыскивать в виде

$$V[X(t), \alpha, t] = \frac{1}{2} \langle X(t), K(t, \alpha) X(t) \rangle + k_0(t, \alpha), \quad (3.21)$$

где $k_0(t, \alpha)$ – скалярная функция.

Подставляя (3.21) в уравнение (3.18) и приравнявая коэффициенты соответствующих форм, получаем уравнения для определения матрицы $K(t, \alpha)$ и функции $k_0(t, \alpha)$

$$\dot{K}(t, \alpha) + K(t, \alpha) A(t, \alpha) + A^*(t, \alpha) K(t, \alpha) = -P; \quad (3.22)$$

$$\dot{k}_0(t, \alpha) = -\frac{1}{2} \text{Sp} [Q_f K(t, \alpha)] \quad (3.23)$$

с граничными условиями $K(T, \alpha) = 0$; $k_0(T, \alpha) = 0$.

Матричное дифференциальное уравнение (3.22) совпадает с уравнением (1.31). Значение функционала (3.20) равно

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} M [\langle X(0), K(0, \alpha) X(0) \rangle] + \frac{1}{2} \int_0^T \text{Sp} [Q_f K(t, \alpha)] dt. \quad (3.24)$$

Если предположить, что отклонение возмущенного движения динамической системы от невозмущенного происходит только под действием белого шума $F(t)$, а в момент $t = 0$ изображающая точка системы находится на траектории невозмущенного движения $X(0) = 0$, функционал (3.24) принимает вид

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^T \text{Sp} [Q_f K(t, \alpha)] dt. \quad (3.25)$$

Когда динамическая система (3.15) является стационарной, а величина T в функционале (3.16) достаточно велика, дифференциальное уравнение (3.22) вырождается в алгебраическое

$$K(\alpha) A(\alpha) + A^*(\alpha) K(\alpha) = -P, \quad (3.26)$$

а функционал (3.25) записывается как

$$I(\alpha) = \frac{T}{2} \text{Sp} [Q_f K(\alpha)]. \quad (3.27)$$

Очевидно, что при $T \rightarrow \infty$ значение функционала (3.27) также стремится к бесконечности. Действительно, при непрерывном воздействии на динамическую систему белого шума система совершает непрерывное возмущенное движение и мера отклонения возмущенного движения от невозмущенного возрастает с ростом времени. Вместе с тем, из (3.27) ясно, что величина T не оказывает влияния на значения оптимальных параметров динамической системы. В этой связи можно положить

$$I(\alpha) = \text{Sp} [Q_f K(\alpha)]. \quad (3.28)$$

Оптимальный вектор $\alpha^* \in G_\alpha$ можно получить в результате решения задачи минимизации

$$I(\alpha^*) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \text{Sp} [Q_f K(\alpha)]. \quad (3.29)$$

Рассмотрим линейную динамическую систему, описываемую уравнением (1.34), на которую воздействует белый шум $f(t)$ с интенсивностью q :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \dot{x}(t) + c^2 x(t) = f(t). \quad (3.30)$$

Предполагается, что на значения коэффициентов демпфирования ξ и жесткости c наложены ограничения (1.35). Запишем интегральный квадратичный функционал (1.36) для данной задачи:

$$I(\xi, c) = \frac{1}{2} M \left\{ \int_0^\infty [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt \right\}.$$

Введя замену переменных $x_1(t) = x(t)$; $x_2(t) = \dot{x}(t)$, уравнение (3.30) представим в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -c^2 x_1(t) - 2\xi x_2(t) + f(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Для системы (3.31) вектор возмущений принимает вид

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица интенсивности вектора возмущений равна

$$Q_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}.$$

Матрица $K(\xi, c)$ для рассматриваемого примера найдена в подразделе 1.3:

$$K(\xi, c) = \begin{bmatrix} \frac{\xi}{c^2} + \frac{1+c^2}{4\xi} & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{1}{2c^2} & \frac{1+c^2}{4c^2\xi} \end{bmatrix}.$$

Теперь можно определить значение функционала качества (3.28), вычисленное на решениях системы (3.31):

$$I(\xi, c) = \frac{q(1+c^2)}{4c^2\xi}. \quad (3.32)$$

Функция (3.32) достигает минимума при $\xi = \xi_{\max}$ и $c = c_{\max}$.

3.3. Стохастическая оптимизация нелинейной динамической системы

Перейдем к рассмотрению проблемы оптимизации нелинейной динамической системы, описываемой уравнением (3.8). Требуется отыскать вектор параметров $\alpha^* \in G_\alpha$, доставляющий минимум интегральному функционалу

$$I(\alpha) = M \left\{ \int_0^T \Omega[X(t, \alpha)] dt \right\},$$

где $\Omega[X(t, \alpha)]$ – определено-положительная функция, допускающая разложение (2.12).

Введем функцию

$$V[X(t), \alpha, t] = \int_t^T \Omega[X(t, \alpha)] dt,$$

удовлетворяющую стохастическому уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \sum_{r=1}^{\infty} \Phi^{(r)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle + \\ & + 0,5 \operatorname{Sp} \left[Q_f \frac{\partial^2 V[X(t), \alpha, t]}{\partial X \partial X} \right] = -\Omega[X(t), \alpha] \end{aligned} \quad (3.33)$$

с граничным условием (3.19).

Решение уравнения (3.33) будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned} V[X(t), \alpha, t] = & V^{(0)}(\alpha, t) + V^{(1)}[X(t), \alpha, t] + \\ & + V^{(2)}[X(t), \alpha, t] + \dots + V^{(r)}[X(t), \alpha, t] + \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

Подставляя (2.12), (3.34) в уравнение (3.33) и приравнявая формы соответствующих степеней, получаем систему уравнений для определения форм функции (3.34):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^{(r)}[X(t), \alpha, t]}{\partial t} + \sum_{k=0}^{r-1} \left\langle \frac{\partial V^{(r-k)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X}, \Phi^{(k+1)}[X(t), \alpha, t] \right\rangle + \\ & + 0,5 \operatorname{Sp} \left[Q_f \frac{\partial^2 V^{(r+2)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X \partial X} \right] + \Omega^{(r)}[X(t), \alpha] = 0; \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$V^{(r)}[X(T), \alpha, T] = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Система (3.35) отличается от (2.17) наличием диффузионных членов

$$0,5 \operatorname{Sp} \left[Q_f \frac{\partial^2 V^{(r+2)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X \partial X} \right] \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Для детерминированной задачи $Q_f = 0$ (3.35) совпадает с (2.17).

Предположив, что в момент $t = 0$ изображающая точка динамической системы находится на траектории невозмущенного движения $X(0) = 0$, получим $I(\alpha) = V^{(\alpha)}(\alpha, 0)$ (3.36).

Уравнение для отыскания формы $V^{(0)}(\alpha, t)$ определим из (3.35), положив $r = 0$:

$$-\frac{\partial V^{(0)}(\alpha, t)}{dt} = 0,5 \operatorname{Sp} \left[Q_f \frac{\partial^2 V^{(2)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X \partial X} \right]. \quad (3.37)$$

Интегрируя (3.37), имеем

$$V^{(0)}(\alpha, 0) = 0,5 \operatorname{Sp} \int_0^T Q_f \frac{\partial^2 V^{(2)}[X(t), \alpha, t]}{\partial X \partial X} dt. \quad (3.38)$$

Если динамическая система является стационарной, а величина T стремится к бесконечности, оптимальный вектор $\alpha^* \in G_\alpha$ можно получить, решив задачу минимизации:

$$I(\alpha^*) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \operatorname{Sp} \left[\frac{\partial^2 V^{(2)}[X(t), \alpha]}{\partial X \partial X} \right]. \quad (3.39)$$

Анализ уравнений (3.35) позволяет сделать вывод, что для отыскания формы $V^{(0)}(\alpha, t)$ следует отыскать все формы до $s + 1$ включительно, где s – число форм в разложении (3.34).

Рассмотрим динамическую систему, возмущенное движение которой описывается уравнением Ван-дер-Поля (2.31) при воздействии на неё белого шума $f(t)$ с интенсивностью q . Требуется выбрать такое значение параметра $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq 0$, чтобы на решениях уравнения

$$\ddot{x}(t) + \alpha [x^2(t) - 1] \dot{x}(t) + x(t) = f(t) \quad (3.40)$$

достигал минимума функционал

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} M \left\{ \int_0^T [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt \right\}.$$

Переходя от уравнения (3.40) к системе двух уравнений первого порядка с помощью замены $x_1(t) = x(t)$; $x_2(t) = \dot{x}(t)$, записываем соответствующие векторы и матрицы

$$\Phi^{(1)}[X(t), \alpha] = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) + \alpha x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \Phi^{(2)}[X(t), \alpha] = 0;$$

$$\Phi^{(3)}[X(t), \alpha] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha x_1^2(t) x_2(t) \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}; \quad Q_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & q \end{bmatrix}.$$

Функцию Ляпунова будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned} V[X(t), \alpha, t] &= V^{(0)}[\alpha, t] + V^{(1)}[X(t), \alpha, t] + V^{(2)}[X(t), \alpha, t] + \\ &+ V^{(3)}[X(t), \alpha, t] + V^{(4)}[X(t), \alpha, t] = \\ &= V^{(0)}[\alpha, t] + \sum_{i=1}^2 k_i(\alpha, t) x_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{ij}(\alpha, t) x_i(t) x_j(t) + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 k_{ijk}(\alpha, t) x_i(t) x_j(t) x_k(t) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n k_{ijkl} x_i(t) x_j(t) x_k(t) x_l(t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Подставляя формы функции (3.41) в соответствующие уравнения (3.33) и приравнявая коэффициенты при соответствующих формах, получаем систему уравнений относительно коэффициентов форм функции (3.41)

$$\begin{aligned} -\dot{k}_1(\alpha, t) &= -k_2(\alpha, t) + qk_{122}(\alpha, t); \\ -\dot{k}_2(\alpha, t) &= k_1(\alpha, t) + \alpha k_2(\alpha, t) + qk_{222}(\alpha, t); \\ -\dot{k}_{11}(\alpha, t) &= -2k_{12}(\alpha, t) + 3qk_{1122}(\alpha, t) + 1; \\ -\dot{k}_{12}(\alpha, t) &= k_{11}(\alpha, t) - k_{22}(\alpha, t) + \alpha k_{12}(\alpha, t) + 3qk_{1222}(\alpha, t); \\ -\dot{k}_{22}(\alpha, t) &= 2k_{12}(\alpha, t) + 2\alpha k_{22}(\alpha, t) + 3qk_{2222}(\alpha, t) + 1; \\ -\dot{k}_{111}(\alpha, t) &= -3k_{112}(\alpha, t); \\ -\dot{k}_{112}(\alpha, t) &= k_{111}(\alpha, t) - 2k_{122}(\alpha, t) + \alpha k_{112}(\alpha, t) - \alpha k_2(\alpha, t); \\ -\dot{k}_{122}(\alpha, t) &= 2k_{112}(\alpha, t) - k_{222}(\alpha, t) + 2\alpha k_{122}(\alpha, t); \\ -\dot{k}_{222}(\alpha, t) &= 3k_{122}(\alpha, t) + 3\alpha k_{222}(\alpha, t); \\ -\dot{k}_{1111}(\alpha, t) &= -4k_{1112}(\alpha, t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\dot{k}_{1112}(\alpha, t) &= k_{1111}(\alpha, t) - 3k_{1122}(\alpha, t) + \alpha k_{1112}(\alpha, t) - \alpha k_{12}(\alpha, t); \\
-\dot{k}_{1122}(\alpha, t) &= 2k_{1112}(\alpha, t) - 2k_{1222}(\alpha, t) + 2\alpha k_{1122}(\alpha, t) - \frac{2}{3}\alpha k_{22}(\alpha, t); \\
-\dot{k}_{1222}(\alpha, t) &= 3k_{1122}(\alpha, t) - k_{2222}(\alpha, t) + 3\alpha k_{1222}(\alpha, t); \\
-\dot{k}_{2222}(\alpha, t) &= 4k_{1222}(\alpha, t) + 4\alpha k_{2222}(\alpha, t)
\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
V^{(0)}(\alpha, T) &= 0; \quad k_1(\alpha, T) = 0; \quad k_2(\alpha, T) = 0; \quad k_{11}(\alpha, T) = 0; \\
k_{12}(\alpha, T) &= 0; \quad k_{22}(\alpha, T) = 0; \quad k_{111}(\alpha, T) = 0; \quad k_{112}(\alpha, T) = 0; \\
k_{122}(\alpha, T) &= 0; \quad k_{222}(\alpha, T) = 0; \quad k_{1111}(\alpha, T) = 0; \quad k_{1112}(\alpha, T) = 0; \\
k_{1122}(\alpha, T) &= 0; \quad k_{1222}(\alpha, T) = 0; \quad k_{2222}(\alpha, T) = 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Значение функционала качества составляет

$$I(\alpha) = V^{(0)}(\alpha, 0) = 0,5q \int_0^T k_{22}(\alpha, t) dt. \tag{3.43}$$

Если величина T достаточно велика, то система дифференциальных уравнений (3.42) вырождается в систему алгебраических уравнений, которую можно получить, приравняв к нулю правые части уравнений (3.42). Затем можно записать

$$\begin{aligned}
k_1(\alpha) &= 0; \quad k_2(\alpha) = 0; \quad k_{11}(\alpha) = 0; \quad k_{112}(\alpha) = 0; \\
k_{122}(\alpha) &= 0; \quad k_{222}(\alpha) = 0; \quad k_{1112}(\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Остальные неизвестные определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
-2k_{12}(\alpha) + 3qk_{1122}(\alpha) + 1 &= 0; \\
k_{11}(\alpha) - k_{22}(\alpha) + \alpha k_{12}(\alpha) + 3qk_{1222}(\alpha) &= 0; \\
2k_{12}(\alpha) + 2\alpha k_{22}(\alpha) + 3qk_{2222}(\alpha) + 1 &= 0; \\
k_{1111}(\alpha) - 3k_{1122}(\alpha) - \alpha k_{12}(\alpha) &= 0; \\
-2k_{1222}(\alpha) + 2\alpha k_{1122}(\alpha) - \frac{2}{3}\alpha k_{22}(\alpha) &= 0; \\
3k_{1122}(\alpha) - k_{2222}(\alpha) + 3\alpha k_{1222}(\alpha) &= 0; \\
4k_{1222}(\alpha) + 4\alpha k_{2222}(\alpha) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

В результате решения системы (3.44) имеем

$$k_{22}(\alpha) = -\frac{2}{2\alpha + q}.$$

Используя соотношение (3.39), можно записать

$$I(\alpha) = -\frac{2q}{2\alpha + q}. \quad (3.45)$$

Минимизация правой части соотношения (3.45) по α при учете ограничений $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq 0$ приводит к решению $\alpha^* = \alpha_{\min}$.

3.4. Стохастическая оптимизация регулируемой цифровой динамической системы

Пусть возмущенное движение непрерывной части системы описывается векторно-матричным уравнением

$$\dot{X}(t) = A(\alpha, t)X(t) + B(t)U(t) + C(t)F(t); \quad \alpha \in G_\alpha.$$

Тогда уравнение, связывающее начальное состояние непрерывной части системы с конечным состоянием на каждом периоде дискретности, имеет вид

$$X[(k+1)T_0] = \Phi(\alpha, kT_0)X(kT_0) + H(\alpha, kT_0)X(kT_0) + \Gamma(\alpha, kT_0)F(kT_0), \quad (3.46)$$

где матрицы $\Phi(\alpha, kT_0)$ и $H(\alpha, kT_0)$ определяются формулами (2.93), (2.94) или (2.95), (2.96), а матрица $\Gamma(\alpha, kT_0)$ – формулой [63]

$$\Gamma(\alpha, kT_0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(\alpha, kT_0)T_0^{i+1}}{(i+1)!} \right) C(kT_0).$$

Обычно с достаточной степенью точности можно положить

$$\Gamma(kT_0) = C(\alpha, kT_0)T_0. \quad (3.47)$$

Полагая, что вычислительное устройство реализует алгоритм управления (2.97), уравнение (3.46) представим в виде

$$X[(k+1)T_0] = \bar{A}(\alpha, \beta, kT_0) X(kT_0) + \Gamma(\alpha, kT_0) F(kT_0), \quad (3.48)$$

где $\bar{A}(\alpha, \beta, kT_0) = \Phi(\alpha, kT_0) + H(\alpha, kT_0) S(\beta, kT_0)$.

Уравнение (3.48) является уравнением замкнутой регулируемой системы с микропроцессором в контуре управления. Требуется выбрать компоненты векторов α и β таким образом, чтобы на решениях системы (3.48) достигал минимума функционал

$$I(\alpha, \beta) = M \left[\sum_{k=0}^N \langle X(kT_0), \bar{P}(\beta, kT_0) X(kT_0) \rangle \right], \quad (3.49)$$

где матрица $\bar{P}(\beta, kT_0)$ определяется соотношением (2.100).

Функцию Ляпунова замкнутой системы (3.48) определим следующим образом:

$$V[X(lT_0), \alpha, \beta, lT_0] = \sum_{k=l}^N \langle X(kT_0), \bar{P}(\beta, kT_0) X(kT_0) \rangle. \quad (3.50)$$

Функция (3.50) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} V[X(kT_0), \alpha, \beta, kT_0] &= T_0 \langle X(kT_0), \bar{P}(\beta, kT_0) X(kT_0) \rangle + \\ &+ V\{X[(k+1)T_0], \alpha, \beta, (k+1)T_0\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

с граничным условием $V[X(NT_0), \alpha, \beta, NT_0] = 0$.

Будем отыскивать функцию Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} V[X(kT_0), \alpha, \beta, kT_0] &= \langle X(kT_0), K(\alpha, \beta, kT_0) X(kT_0) \rangle + \\ &+ k_0(\alpha, \beta, kT_0), \end{aligned} \quad (3.52)$$

где $k_0(\alpha, \beta, kT_0)$ – скалярная решетчатая функция.

Подставляя (3.52) в уравнение (3.51) и приравнявая коэффициенты при соответствующих квадратичных формах, получаем разностные уравнения для отыскания матрицы $K(\alpha, \beta, kT_0)$ и функции $k_0(\alpha, \beta, kT_0)$:

$$\begin{aligned} \bar{A}^*(\alpha, \beta, k T_0) K[\alpha, \beta, (k+1) T_0] \bar{A}(\alpha, \beta, k T_0) - \\ - K(\alpha, \beta, k T_0) = -\bar{P}(\beta, k T_0) T_0; \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} k_0(\alpha, \beta, (k+1) T_0) = k_0(\alpha, \beta, k T_0) - \\ - \text{Sp} \{ Q_f \Gamma^*(\alpha, k T_0) K[(\alpha, \beta, (k+1) T_0)] \Gamma(\alpha, k T_0) \} \end{aligned} \quad (3.54)$$

с граничными условиями $K(\alpha, \beta, N T_0) = 0$; $k_0(\alpha, \beta, N T_0) = 0$.

Уравнение (3.53) совпадает с уравнением (2.105) для детерминированной системы. Решение уравнения (3.54) записывается в виде

$$k_0(\alpha, \beta, l T_0) = \sum_{k=l}^N \text{Sp} \{ Q_f \Gamma^*(\alpha, k T_0) K[\alpha, \beta, (k+1) T_0] \Gamma(\alpha, k T_0) \}.$$

С учетом соотношений (3.49), (3.50) можно получить

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) = M \left[\langle X(0), K(\alpha, \beta, 0) X(0) \rangle \right] + \\ + \sum_{k=l}^N \text{Sp} \{ Q_f \Gamma^*(\alpha, k T_0) K[\alpha, \beta, (k+1) T_0] \Gamma(\alpha, k T_0) \}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Если параметры непрерывной и дискретной частей динамической системы не изменяются во времени, а число N достаточно велико, матрицу $K(\alpha, \beta)$ можно определить из матричного алгебраического уравнения (2.21). Если к тому же в момент $t = 0$ изображающая точка замкнутой системы находится на траектории невозмущенного движения, значение функционала (3.55) равно

$$I(\alpha, \beta) = N \text{Sp} \left[Q_f \Gamma^*(\alpha) K(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha) \right]. \quad (3.56)$$

Оптимальные значения векторов α, β находятся в результате решения задач минимизации

$$I(\alpha^*, \beta^*) = \min_{\substack{\alpha \in G_\alpha \\ \beta \in G_\beta}} \text{Sp} \left[Q_f \Gamma^*(\alpha) K(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha) \right].$$

Исследуем систему топливоподачи транспортного дизеля, возмущенное движение непрерывной части которого описывается системой

дифференциальных уравнений (2.58) при воздействии белого шума $f(t)$ и интенсивностью q :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + cf(t); \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) + bu(t).\end{aligned}\tag{3.57}$$

Алгоритм управления, реализуемый микропроцессором, имеет вид (2.18), а минимизируемый функционал выберем в виде

$$I = M \left\{ \sum_{k=0}^N \left[\left(\frac{x_1(kT_0)}{x_{1\max}} \right)^2 + \left(\frac{x_2(kT_0)}{x_{2\max}} \right)^2 \right] \right\}.$$

Матрица C и вектор возмущений $F(t)$ для системы (3.57) записываются так:

$$C = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицы Q_f и Γ равны

$$Q_f = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} cT_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $K(s)$ получена в подразделе 2.5. Тогда функционал (3.56) принимает вид

$$I(s) = Nqc^2T_0^2k_{11}(s) = Nqc^2T_0^2 \left[\frac{\beta}{a_{32}} - \frac{(\alpha s + \beta)bs}{(\gamma s^2 + \delta s + \mu)a_{11}} \right].$$

Оптимальное значение параметра s получаем в результате решения задачи минимизации

$$I(s^*) = \min_{|s| \leq s_{\max}} \left[- \frac{(\alpha s + \beta)bs}{(\gamma s^2 + \delta s + \mu)a_{11}} \right].$$

3.5. Стохастическая оптимизация систем с распределенными параметрами

Решение задачи стохастической оптимизации систем с распределенными параметрами путем развития метода, изложенного в подразделе 2.6, связано со значительными теоретическими и вычислительными трудностями. Вместе с тем для динамических систем с распределенными параметрами, совершающих колебательные и описываемых уравнениями (2.112–2.115), может быть предложен более простой метод параметрической оптимизации с учетом внешних случайных возмущений, действующих на динамическую систему.

Уравнение колебаний динамической системы с распределенными параметрами типа (2.112)–(2.115) с учетом внешних возмущений в общем случае может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 u(X, t)}{\partial t^2} = L_x(\alpha) u(X, t) + F(X, t), \quad \alpha \in G_\alpha, \quad (3.58)$$

где $L_x(\alpha)$ – линейный дифференциальный оператор, определяемый типом уравнения в частных производных; $F(X, t)$ – внешнее возмущение, приложенное к системе. Требуется отыскать вектор варьируемых параметров $\alpha^* \in G_\alpha$, доставляющий минимум интегральному квадратичному функционалу

$$I(\alpha) = M \left\{ \int_0^T \int_{G_x} \left[u^2(X, t) + \left(\frac{\partial u(X, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dG_x dt \right\}. \quad (3.59)$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.58):

$$\frac{\partial^2 u_0(X, t)}{\partial t^2} = L_x(\alpha) u_0(X, t). \quad (3.60)$$

Решение уравнения (3.60) будем искать в виде, аналогичном (2.133):

$$u_0(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) \Phi_i(X), \quad (3.61)$$

где $\Phi_i(X)$ – скалярные собственные формы колебаний.

Подставляя (3.61) в (3.60), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_i(t) \Phi_i(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) L_x(\alpha) \Phi_i(X). \quad (3.62)$$

Если предположить, что система совершает колебания по одной из собственных форм, то функция $\varphi_i(t)$ записываются следующим образом:

$$\varphi_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t, \quad (3.63)$$

где постоянные A_i, B_i определяются из начальных условий (2.121).

После подстановки (3.63) в (3.62) получаем уравнение собственных форм колебаний

$$\omega_i^2 \Phi_i(X) = L_x(\alpha) \Phi_i(X). \quad (3.64)$$

Конкретизируя вид оператора $L_x(\alpha)$ и граничные условия (2.120), можно определить значения собственных частот колебаний и соотношения для собственных форм.

Решение неоднородного уравнения (3.58) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (3.60) и частного решения неоднородного уравнения (3.58):

$$u(X, t) = u_0(X, t) + u_1(X, t). \quad (3.65)$$

Изучим установившийся режим колебаний, пренебрегая первой составляющей решения (3.65). Частное решение уравнения (3.58) будем искать в виде [75]

$$u_1(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) \Phi_i(X), \quad (3.66)$$

где $\Phi_i(X)$ – собственные формы колебаний, определяемые уравнением (3.64) и граничными условиями (2.120). Подставляя соотношение (3.64) в уравнение (3.58), имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_i(t) \Phi_i(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) L_x(\alpha) \Phi_i(X) + F(X, t). \quad (3.67)$$

Правую и левую части уравнения (3.67) умножим на $\Phi_i(X)$ и проинтегрируем по области допустимых значений G_x :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_i(t) \int_{G_x} \Phi_i(X) \Phi_j(X) dG_x = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{G_x} \Phi_j(X) L_x(\alpha) \Phi_j(X) dG_x + \\ + \int_{G_x} F(X, t) \Phi_j(X) dG_x. \end{aligned} \quad (3.68)$$

С учетом условия ортогональности собственных форм

$$\int_{G_x} \Phi_i(X) \Phi_j(X) dG_x = c_j \delta_{ij} \quad (3.69)$$

уравнение (3.68) запишем в виде

$$\ddot{\varphi}_{ij}(t) = a_j(\alpha) \varphi_j(t) + f_j(t), \quad (3.70)$$

где постоянные коэффициенты $a_j(\alpha)$ и функции $f_j(t)$ равны

$$a_j(\alpha) = \frac{1}{c_j} \int_{G_x} \Phi_j(X) L_x(\alpha) \Phi_j(X) dG_x; \quad (3.71)$$

$$f_j(t) = \frac{1}{c_j} \int_{G_x} F(X, t) \Phi_j(X) dG_x. \quad (3.72)$$

Подставим в функционал (3.59) соотношение (3.66). С учетом условия ортогональности собственных форм (3.69) находим

$$I(\alpha) = M \left\{ \int_0^T \sum_{j=0}^{\infty} c_j [\dot{\varphi}_j^2(t) + \ddot{\varphi}_j^2(t)] dt \right\}. \quad (3.73)$$

При решении практических задач оптимизации обычно учитывается несколько первых форм колебаний, например, s форм. Введем вектор состояния размерности $2s$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ \vdots \\ y_{2s-1}(t) \\ y_{2s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) \\ \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_s(t) \\ \dot{\varphi}_s(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (3.70) запишем в векторно-матричной форме

$$\dot{Y}(t) = A(\alpha) Y(t) + F(t), \quad (3.74)$$

где матрица $A(\alpha)$ и вектор $F(t)$ равны

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1(\alpha) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1(\alpha) & 0 \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1(t) \\ 0 \\ f_2(t) \\ \vdots \\ 0 \\ f_s(t) \end{bmatrix}.$$

С учетом принятых обозначений функционал (3.73) принимает вид

$$I(\alpha) = M \left\{ \int_0^T \langle Y(t), PY(t) dt \rangle \right\}, \quad (3.75)$$

где матрица P равна

$$P = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_s \end{bmatrix}.$$

Таким образом, задача параметрической оптимизации колебательной системы с распределенными параметрами второго порядка формально сведена к задаче параметрической оптимизации линейной стационарной системы порядка $2s$, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, решение которой получено в подразделе 3.2.

Рассмотрим уравнение продольных колебаний упругого стержня с учетом внутреннего демпфирования [75]

$$ES \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t), \quad (3.76)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня; E – модуль упругости материала стержня; ξ – коэффициент внутреннего демпфирования; μ – погонная масса стержня.

Ограничимся первой формой колебаний

$$u(x,t) = \varphi(t) \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad (3.77)$$

где l – длина стержня.

Подставляя (3.77) в (3.76), имеем

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{\xi}{\mu} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \dot{\varphi}(t) + \frac{ES}{\mu} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \varphi(t) = f(t), \quad (3.78)$$

где

$$f(t) = -\frac{1}{\mu} \frac{\int_0^l F(x,t) \sin \frac{\pi x}{2l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx} = -\frac{2}{\mu l} \int_0^l F(x,t) \sin \frac{\pi x}{2l} dx.$$

Введем обозначения

$$d^2 = \frac{ES}{\mu} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2; \quad 2n = \frac{\xi}{\mu} \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2; \quad y_1(t) = \varphi(t); \quad y_2(t) = \dot{\varphi}(t).$$

Тогда уравнение (3.78) представим в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t); \quad \dot{y}_2(t) = -d^2 y_1(t) - 2ny_2(t) + f(t). \quad (3.79)$$

Если $F(x, t)$ представляет собой белый шум, то $f(t)$ – также белый шум [72] с интенсивностью q .

Требуется отыскать такое значение коэффициента внутреннего демпфирования ξ , удовлетворяющего ограничениям

$$\xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}, \quad (3.80)$$

чтобы на решениях уравнений (3.76) достигал минимума функционал

$$I(\xi) = M \left[\int_0^T \int_0^l \left\{ u^2(x, t) + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 \right\} dx dt \right]. \quad (3.81)$$

Функционал качества (3.81) приведем к виду (3.73). Для рассматриваемой задачи функционал (3.73) принимает вид

$$I(\xi) = \frac{l}{2} M \left\{ \int_0^T [y_1^2(t) + y_2^2(t)] dt \right\}. \quad (3.82)$$

Повторение процедуры решения задачи оптимизации функционала (3.82) для динамической системы, описываемой уравнениями (3.79), показывает, что оптимальное значение величины ξ доставляет минимум функции

$$I(\xi) = \frac{lq(1+d^2)}{8d^2n(\xi)} \quad (3.83)$$

с учетом ограничений (3.80). Очевидно, что функция (3.83) достигает минимума при максимальном значении коэффициента внутреннего демпфирования $\xi = \xi_{\max}$.

Рассмотрим космический аппарат, возмущенное управляемое движение которого описывается уравнениями, полученными Г. Л. Дегтяревым и Т. К. Сиразетдиновым [65].

При построении математической модели системы авторы предполагали, что панели солнечных батарей моделируются упругими стержнями,

закрепленными консольно в жестком теле, описывающим поведение космического аппарата. В дополнение к сказанному учтем демпфирование в материале стержней и возможность случайного внешнего воздействия на аппарат. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$I_c \frac{d^2 \gamma(t)}{dt^2} + 2 \int_0^l m_1(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx = M_y(t) + M_f(t); \quad (3.84)$$

$$m_1(x) \frac{d^2 \gamma(t)}{dt^2} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} +$$

$$+ \xi \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = 0,$$

где в соответствии с работой [65] введены обозначения: I_c – момент инерции системы, состоящей из основного жесткого тела (I_0) и двух гибких стержней:

$$I_c = I_0 + 2 \int_0^l m_1(x) (x + r);$$

$$m_1(x) = m(x) (x + r);$$

$m(x)$ – погонная масса стержня; r – радиус космического аппарата; $EI(x)$ – изгибная жесткость стержня; ξ – коэффициент, характеризующий внутреннее демпфирование; l – длина стержня; $y(x, t)$ – перемещение при изгибе стержневого элемента; $\gamma(t)$ – угол поворота жесткого тела в инерциальной системе координат; $M_y(t)$ – управляющее, а $M_f(t)$ – внешнее случайное воздействие, приложенное к основному жесткому телу.

Для данного типа закрепления стержней в месте заделки равны нулю перемещения и углы поворота, а на свободном конце – момент и перерезывающая сила. Тогда граничные условия имеют вид

$$y(x, t)|_{x=0} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad (3.85)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial}{\partial x} EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0.$$

Решение системы (3.84) будем искать в форме

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) T_k(t), \quad (3.86)$$

где

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{\lambda_k x}{l} + A_k \cos \frac{\lambda_k x}{l} + B_k \operatorname{sh} \frac{\lambda_k x}{l} + C_k \operatorname{ch} \frac{\lambda_k x}{l} \quad (3.87)$$

– собственные формы стержня, совершающего изгибные колебания. Коэффициенты A_k , B_k , C_k , λ_k определяются при решении задачи о свободных колебаниях консольного стержня с учетом граничных условий (3.85).

После подстановки (3.86) в (3.84) и предположения, что агенты имеют постоянное поперечное сечение, получаем:

$$I_c \ddot{\gamma}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) \int_0^l m_1(x) \varphi_k(x) dx = M_y(t) + M_f(t); \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} m_1(x) \ddot{\gamma}(t) + m(x) \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \ddot{T}_k(t) + EI \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{IV}(x) T_k(t) + \\ + \xi EI \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{IV}(x) \dot{T}_k(t) = 0. \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение (3.88) на $\varphi_i(x)$ и проинтегрируем по длине стержня

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) \int_0^l m_1(x) \varphi_l(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{T}_k(t) \int_0^l m(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx + \\ + EI \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \int_0^l \varphi_k^{IV}(x) \varphi_i(x) dx + \xi EI \sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(t) \int_0^l \varphi_k^{IV}(x) \varphi_i(x) dx. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Учитывая условия ортогональности собственных форм и вводя обозначения

$$a_k = \int_0^l m_1(x) \varphi_k(x) dx;$$

$$b_k = EI \int_0^l \varphi_k^{IV}(x) \varphi_k(x) dx;$$

$$c_k = \int_0^l m(x) \varphi_k(x) \varphi_k(x) dx,$$

(3.89) можно записать в виде

$$a_k \ddot{\gamma}(t) + c_k \ddot{T}_k(t) + \xi b_k \dot{T}_k(t) + b_k T_k(t) = 0. \quad (3.90)$$

Предположим, что управляющее воздействие равно

$$M_y(t) = k_1 \gamma(t) + k_2 \dot{\gamma}(t).$$

Тогда систему (3.88) с учетом (3.90) можно представить как

$$I_c \ddot{\gamma}(t) - k_2 \dot{\gamma}(t) - k_1 \gamma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ddot{T}_k(t) = M_f(t); \quad (3.91)$$

$$a_k \ddot{\gamma}(t) + c_k \ddot{T}_k(t) + \xi b_k \dot{T}_k(t) + b_k T_k(t) = 0 \quad (k = \overline{1, \infty}).$$

С учетом только первого тона упругих колебаний антенн солнечных батарей ($k = 1$) после замены переменных

$$x_1(t) = \gamma(t); \quad x_2(t) = \dot{\gamma}(t); \quad x_3(t) = T_1(t); \quad x_4(t) = \dot{T}_1(t), \quad (3.92)$$

уравнения (3.91) принимают нормальную форму

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \quad \dot{x}_3(t) = x_4(t); \\ I_c \dot{x}_2(t) + a_1 \dot{x}_4(t) &= k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + M_f(t); \\ a_1 \dot{x}_2(t) + c_1 \dot{x}_4(t) &= -\xi b_1 x_4(t) - b_1 x_3(t). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Запишем систему (3.93) в матричной форме

$$C \dot{X}(t) = B X(t) + M(t), \quad (3.94)$$

где матрицы C , B и вектор $M(t)$ имеют вид

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & I_c & 0 & a_1 \\ 0 & a_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & -\xi b_1 \end{bmatrix}; \quad M(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_f(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После умножения обеих частей уравнения (3.94) на C^{-1} последнее будет аналогичным уравнению (3.15):

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t), \quad (3.95)$$

где $A = C^{-1}B$; $F(t) = C^{-1}M(t)$.

Итак, задача оптимизации дискретно-континуальной системы (3.84) сведена к задаче оптимизации динамической системы с сосредоточенными параметрами, описываемой матрично-векторным уравнением (3.95), путь решения которой изложен выше.

3.6. Алгоритмическая стохастическая оптимизация динамических систем

Практически все задачи, решаемые инженером или конструктором, имеют, по крайней мере, несколько решений, из которых необходимо выбрать лучшее по тем или иным соображениям. При этом процедура выбора оптимального решения может быть аналитической там, где это возможно или чаще всего численной, основанной на какой-либо стратегии.

В общем случае оптимизация представляет совокупность фундаментальных теоретических результатов и численных методов, позволяющих найти решение из большого числа альтернативных. Остановимся на инженерных методах, ориентированных на вычислительную технику. Прежде всего следует корректно поставить задачу инженерной оптимизации. Для этого необходимо выделить из внешней среды объект управления, математически описать его функционирование и взаимосвязь с внешней средой, например, при помощи математической модели

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha] + F(t). \quad (3.96)$$

При j -й реализации случайной вектор-функции $F^j(t)$ имеет место j -я реализация вектора состояния систем $X^j(t, \alpha)$.

Если подлежащая оптимизации система определена, выбирается критерий качества функционирования системы и отыскивается его минимальное или максимальное значение. Обычно говорят только о поиске минимального значения, так как он может быть сведен к предыдущему. При этом достаточно изменить знак у функции, определяющей качество системы. Добиться минимального значения функции качества (целевой функции) можно путем изменения по определенному правилу ряда независимых переменных. Для выбора независимых переменных необходимо стремиться к рассмотрению только тех из них, которые оказывают существенное влияние на поведение целевой функции. Целевая функция не всегда может быть представлена в виде аналитического выражения (формулы), а для ее вычисления требуется предварительное решение задачи анализа. Но для численной реализации методов оптимизации это не имеет принципиального значения, поскольку при аналитическом задании, и при решении задачи анализа вычисляется значение целевой функции с заданными значениями независимых переменных (проектных параметров). В общем случае целевую функцию можно показать в виде

$$I(\alpha) = f(\alpha); \quad \alpha = G_\alpha \in R^s. \quad (3.97)$$

Задачи оптимизации можно разбить на два больших класса – безусловные и условные. Безусловная состоит в отыскании минимума функции (3.97) на некотором множестве s -мерного пространства. Условные задачи, или задачи с ограничениями, отличается то, что на изменение проектных параметров накладываются ограничения. Они могут быть выписаны в виде равенств или неравенств. Тогда задача оптимизации формулируется как задача минимизации функции (3.97) при ограничениях

$$H_i(\alpha) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots);$$

$$G_j(\alpha) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

В общем случае функции $f(\alpha)$, $H_i(\alpha)$, $G_j(\alpha)$ линейны или нелинейны. В зависимости от типа этих функций различают задачи линейного и нелинейного программирования. Иногда часть ограничений – равенств разрешается относительно части переменных и, таким образом, размер-

ность вектора проектных или варьируемых параметров существенно сокращается.

Изложенная выше методика синтеза систем автоматического управления с помощью построения функций Ляпунова с последующим поиском минимакса или минимума построенной функции позволяет решать достаточно сложные инженерные задачи параметрического синтеза и параметрической оптимизации динамических систем. Вместе с тем, изложенная методика предполагает достаточно объемную предварительную работу по отысканию форм различной степени, составляющих функцию Ляпунова. При решении задач параметрического синтеза сложных динамических систем такая работа может оказаться существенным препятствием для достижения поставленной цели.

К классу сложных динамических систем принято относить системы, возмущенное движение которых описывается системами дифференциальных уравнений высокого порядка [77]. Этот термин возник в первой половине 60-х годов предыдущего столетия, когда вычислительные машины были построены на электронно-вакуумной элементной базе, имели ограниченный объем памяти и обладали невысоким быстродействием. Совершенствование электронной элементной базы ЭВМ во второй половине XX столетия привело к лавинообразному росту объема памяти и быстродействия вычислительных машин, а разработка мощных программных комплексов MATCAD, MathLAB, Pro-Engenear, ANSYS, COSMOS и других привело к возможности решения задач анализа и синтеза технических объектов, возмущенное движение которых описывается системами дифференциальных уравнений весьма высокого порядка. Такие объекты ранее было принято считать сложными, однако резкое повышение технических характеристик ЭВМ и создание мощных универсальных программных комплексов позволили снять проблему «проклятия размерности» и уточнить понятие «сложной системы». На наш взгляд понятие «сложная система» относится к динамическим системам, характеризующихся следующими свойствами:

- возмущенное движение «сложных» динамических систем описывается системой дифференциальных уравнений высокого порядка;
- «сложные» динамические системы являются существенно нелинейными системами, содержащими неаналитические нелинейности, которые не могут быть линеаризованы классическими методами;

- «сложные» динамические системы, как правило, являются дискретно-континуальными, математические модели возмущенного движения которых содержат как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных;
- «сложные» динамические системы содержат ЭВМ в контуре управления, реализующие алгоритмы управления, описываемые уравнениями в конечных разностях;
- внешние возмущения, действующие на «сложные» технические объекты, как правило, являются случайными и имеют широкие амплитудные и частотные спектры;
- к «сложным» динамическим системам предъявляется целая система требований, формализация которых приводит к требованию достижения экстремумов нескольких функционалов качества.

Несмотря на высокую степень формализации задач параметрического синтеза, решаемых с помощью построения функций Ляпунова проектируемой динамической системы, практическое использование изложенной выше методики встречает значительные, а порой и непреодолимые, трудности. Это и указанные ранее сложности построения функций Ляпунова нелинейных динамических систем, особенно в случае нелинейных характеристик, описываемых неаналитическими функциями. Это также переход от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям в задачах параметрического синтеза дискретно-континуальных динамических систем с необходимостью учета определенного числа собственных форм колебаний континуальной части объекта. И, наконец, необходимость перехода от обыкновенных дифференциальных уравнений математической модели динамической системы с ЭВМ в контуре управления к уравнениям в конечных разностях. Эти обстоятельства обуславливают поиск новых методик решения задач параметрического синтеза сложных динамических систем, основанных на использовании последних достижений вычислительной техники и программирования [51].

Поставим задачу отыскания вектора варьируемых параметров $\alpha \in G_\alpha$ динамической системы (3.96), доставляющего минимум интегральному квадратичному функционалу

$$I(\alpha) = \overline{M}_{(j=1, N)} \left\{ \int_0^T \langle X^j(t, \alpha), QX^j(t, \alpha) \rangle dt \right\}, \quad (3.98)$$

где $\overline{M}_{(j=1,N)} \{ \cdot \}$ – символ математического ожидания случайной величины

$\{ \cdot \}$ по реализациям случайного процесса $X^j(t, \alpha)$, $(j = \overline{1, N})$; Q – квадратная симметричная матрица.

Предполагается, что стохастические характеристики случайной вектор-функции $F(t)$ известны.

Сформулированная задача параметрического синтеза динамической системы относится к классу задач нелинейного программирования, в которой целевая функция (3.98) для каждого из векторов $\alpha \in G_\alpha$ вычисляется по следующему правилу.

К системе дифференциальных уравнений (3.96) n -го порядка добавляется еще одно уравнение

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \langle X(t), QX(t) \rangle. \quad (3.99)$$

На вход системы (3.96), (3.97) подается j -я реализация векторного случайного процесса $F^j(t)$ и находится решение системы (3.96), (3.97). Для N реализацией случайного процесса $F^j(t)$ находятся N реализаций случайной функции $x_{n+1}^j(t)$, $(j = \overline{1, N})$. Из соотношений (3.98) и (3.99) следует

$$I^j(\alpha) = x_{n+1}^j(T, \alpha), \quad (j = \overline{1, N}), \quad (3.100)$$

следовательно

$$I(\alpha) = \overline{M}_{(j=1,N)} \{ x_{n+1}^j(T, \alpha) \} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{n+1}^j(T, \alpha). \quad (3.101)$$

Оценим дисперсию случайной величины (3.100)

$$D(\alpha) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N [x_{n+1}^j(T, \alpha) - I(\alpha)]^2. \quad (3.102)$$

Зададимся необходимой точностью оценки функционала (3.101), т. е. величинами ε и β , для которых [72]

$$P \{ |I(\alpha) - I^j(\alpha)| \leq \varepsilon \} = \beta, \quad (3.103)$$

где $P\{\cdot\}$ – вероятность выполнения неравенства $\{\cdot\}$.

В соответствии с [72] по заданной величине β с помощью таблиц находится значение коэффициента t_β и отыскивается необходимое количество реализаций вектор-функции $F^j(t)$

$$N = \frac{D(\alpha) t_\beta^2}{\varepsilon^2}. \quad (3.104)$$

Рассмотрим систему первого приближения по отношению к исходной системе (3.96)

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t) + F(t). \quad (3.105)$$

Выше было показано, что решение сформулированной задачи сводится к отысканию минимума по $\alpha \in G_\alpha$ функционала (3.27). В качестве примера рассмотрим задачу параметрического синтеза аналоговой системы наведения и стабилизации танковой пушки.

Возмущенное движение объекта стабилизации описывается системой дифференциальных уравнений (1.39), а закон стабилизации, реализуемый электронным блоком стабилизатора, записывается в виде (1.43). Подставим (1.43) в правую часть последнего уравнения (1.39). В результате получаем математическую модель возмущенного движения замкнутой аналоговой системы наведения и стабилизации танковой пушки

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_m k_d}{I_\Pi} x_3(t) + \frac{1}{I_\Pi} M_B(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{k_e}{I_k r_o} k_\phi k_\Gamma x_1(t) + \frac{k_e}{I_k r_o} k_\phi k_c x_2(t) - \frac{c_k}{I_k} x_3(t) - \frac{f_k}{I_k} x_4(t).$$

Варьируемыми параметрами рассматриваемой системы являются коэффициенты усиления электронного блока стабилизатора k_ϕ и k_ϕ , следовательно $\alpha = [k_\phi \ k_\phi]^*$. В качестве множества G_α выберем область устойчивости замкнутой системы, приведенной на рис. 1.11.

Метод генерации конкретных реализаций $M_{\text{в}}^j(j=\overline{1,N})$ случайной функции $M_{\text{в}}(t)$ изложен в работе [51].

Для системы (3.106), где $M_{\text{в}}(t)$ – случайная функция, определяемая случайной поверхностью движения, текущим радиусом поворота $R(t)$ и текущей скоростью движения танка $v(t)$, требуется выбрать такие значения варьируемых параметров k_{φ} и $k_{\dot{\varphi}}$, чтобы на решениях этой системы достигал минимума интегральный квадратичный функционал

$$I(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}) = \underset{(j=\overline{1,N})}{M} \left\{ \int_0^T \left[\beta_1^2 \left(x_1^j(t) \right)^2 + \beta_2^2 \left(x_2^j(t) \right)^2 \right] dt \right\}, \quad (3.107)$$

где $x_1^j(t)$ и $x_2^j(t)$ – реализации случайных функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при j -й реализации случайного внешнего воздействия $M_{\text{в}}^j(t)$.

На рис. 3.4 приведена структурно-логическая схема алгоритма решения сформулированной задачи параметрического синтеза. Алгоритм представляет собой совокупность четырех последовательных вычислительных блоков.

Блок А1 представляет собой генератор случайной функции $M_{\text{в}}^j(t)$. Более подробно функционирование блока А1 описано в работе [51].

С выхода блока А1 реализации момента внешнего возмущения $M_{\text{в}}^j(t), j=\overline{1,N}$ поступают на вход блока А2, реализующего математическую модель замкнутой системы стабилизации (3.106), а также процедуру Minimize программного продукта MathCad или процедуру Optimization Toolbox программного продукта Matlab по отношению к частным функционалам

$$I_1(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}) = \underset{(j=\overline{1,N})}{M} \left\{ \int_0^T \left(x_1^j(t) \right)^2 dt \right\}; \quad (3.108)$$

$$I_2(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}) = \underset{(j=\overline{1,N})}{M} \left\{ \int_0^T \left(x_2^j(t) \right)^2 dt \right\}. \quad (3.109)$$

В результате на выходе блока A2 имеем минимальные значения частных функционалов (3.108) и (3.109) I_1^* и I_2^* .

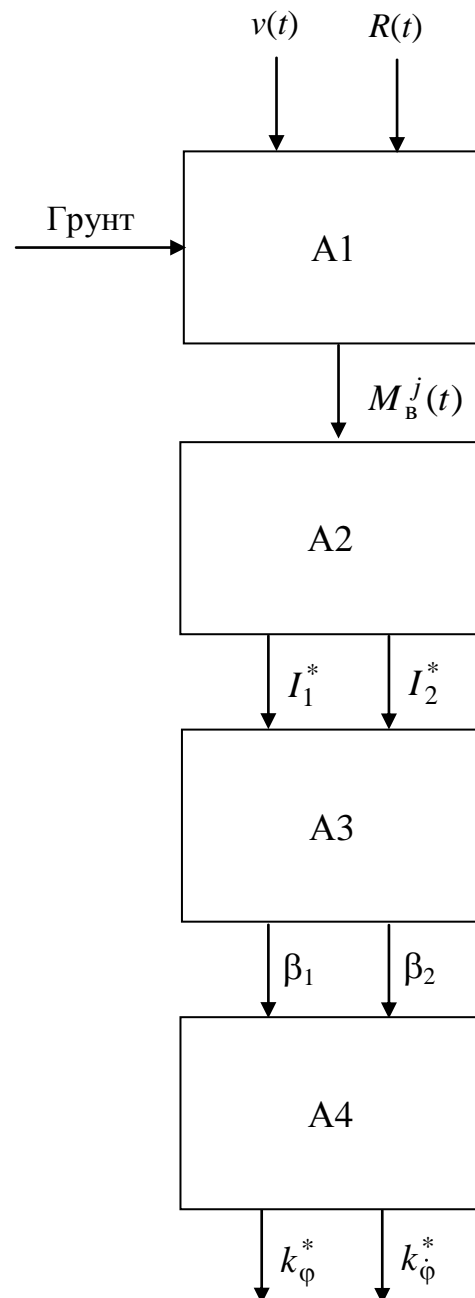


Рис. 3.4. Структурно-логическая схема алгоритма решения задачи параметрического синтеза

С выхода блока А2 на вход блока А3 поступают величины I_1^* и I_2^* . Блок А3 реализует формулы (2.184) отыскания весовых коэффициентов β_1 и β_2 аддитивного функционала (3.107) и формирует аддитивный функционал (3.107), поступающий на вход блока А4.

Блок А4, как и блок А2, реализует математическую модель (3.106), а также указанные выше процедуры минимизации по отношению к аддитивному функционалу (3.107). В результате на выходе блока А4 имеем значения варьируемых параметров k_ϕ^* и $k_{\dot{\phi}}^*$, доставляющих на решениях модели (3.106) минимум аддитивному функционалу (3.107). В качестве множества допустимых значений параметров k_ϕ^* и $k_{\dot{\phi}}^*$ рекомендуется выбирать область устойчивости замкнутой системы в плоскости варьируемых параметров $(k_\phi^*, k_{\dot{\phi}}^*)$, методика построения которой изложена в разделе 1.4.

Линейный закон стабилизации (1.43) реализуется аналоговым стабилизатором. В настоящее время на отечественных и зарубежных объектах бронетанковой техники осуществляется переход от линейных стабилизаторов аналогового типа к нелинейным стабилизаторам цифрового типа. Статическая характеристика электронного блока таких стабилизаторов имеет вид, представленный на рис. 1.12 и описывается соотношениями (1.83) и (1.86). Выходной сигнал цифрового электронного блока стабилизатора является кусочно-постоянным сигналом, сохраняющим постоянное значение в интервале $(nT, (n+1)T)$, где T – период квантования цифрового электронного блока

$$u(t) = \begin{cases} u[nT] & \text{при } nT \leq t < (n+1)T; \\ u[(n+1)T] & \text{при } (n+1)T \leq t < (n+2)T. \end{cases}$$

Кроме того, с целью повышения помехозащищенности замкнутой цифровой системы наведения и стабилизации, в цифровом электронном блоке нашли широкое использование цифровые низкочастотные фильтры, в частности, фильтры Баттеруорта. Так, в цифровых электронных блоках вместо алгоритма стабилизации (1.43) используется следующий алгоритм стабилизации

$$u[nT] = \begin{cases} \sigma_{\varphi}[nT] & \text{при } u^* \leq |\sigma_{\varphi}[nT]| \leq u^{**}; \\ u^* \operatorname{sign} \sigma_{\varphi}[nT] & \text{при } |\sigma_{\varphi}[nT]| < u^*; \\ u^{**} \operatorname{sign} \sigma_{\varphi}[nT] & \text{при } |\sigma_{\varphi}[nT]| > u^{**}; \end{cases}$$

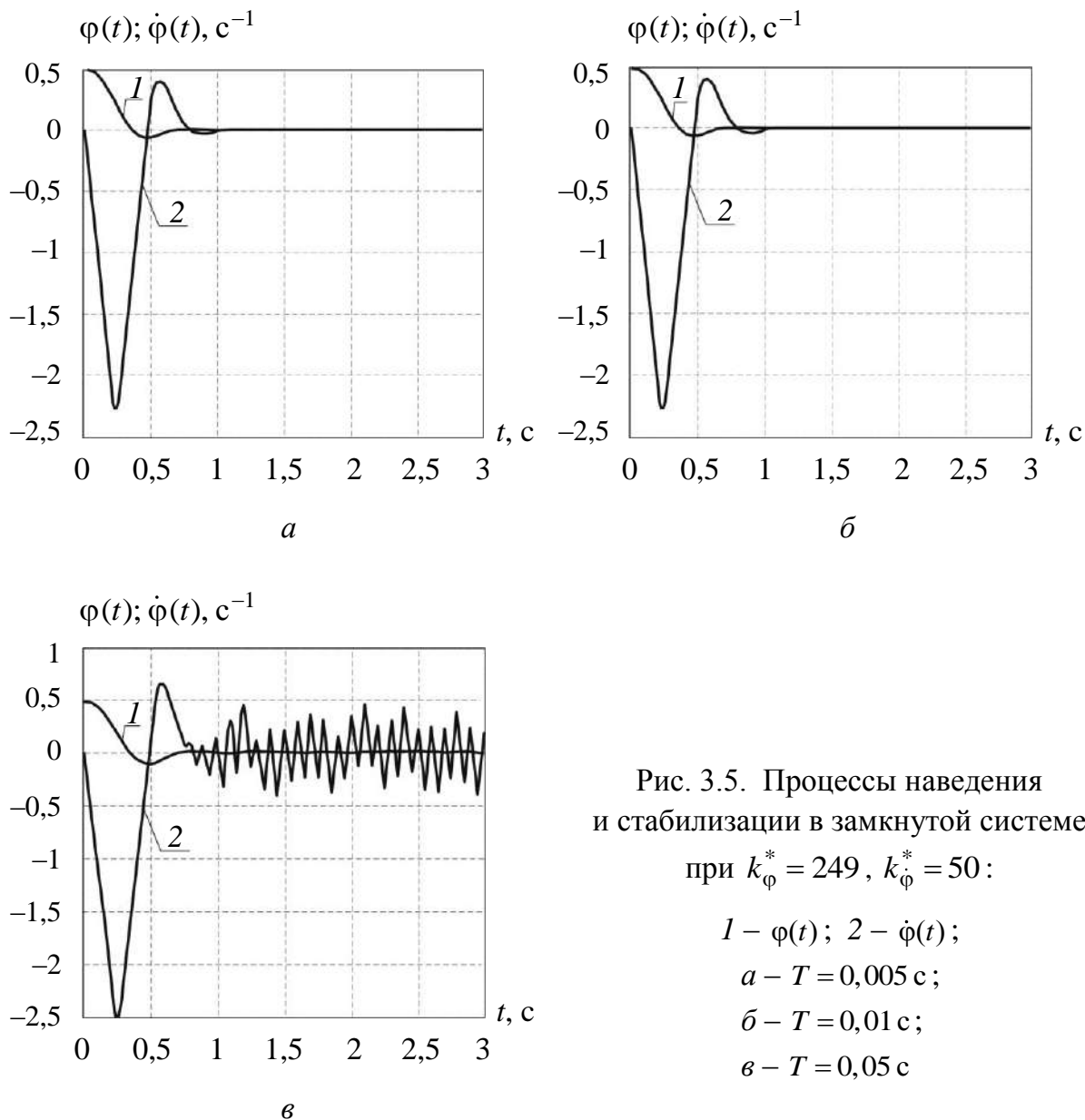
$$\sigma_{\varphi}[nT] = k_{\varphi} \tilde{u}_{\varphi}[nT] + k_{\varphi} \tilde{u}_{\omega}[nT]; \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\varphi}[nT] = & a_1 k_{\Gamma} k_{\text{BT}} \{ \varphi[nT] + 2\varphi[(n-1)T] + \varphi[(n-2)T] \} - \\ & - d_1 \tilde{u}_{\varphi}[(n-1)T] - d_2 \tilde{u}_{\varphi}[(n-2)T]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\omega}[nT] = & a_1 k_{\epsilon} k_{\text{BT}} \{ \omega[nT] + 2\omega[(n-1)T] + \omega_{\varphi}[(n-2)T] \} - \\ & - d_1 \tilde{u}_{\omega}[(n-1)T] - d_2 \tilde{u}_{\omega}[(n-2)T]. \end{aligned}$$

Тогда математическая модель замкнутой цифровой системы наведения и стабилизации танковой пушки представляет собой совокупность системы обыкновенных дифференциальных уравнений объекта стабилизации (1.37), (1.38) и алгоритмов (3.110), реализуемых цифровым стабилизатором.

Использование описанного выше алгоритма параметрического синтеза приводит к выводу о том, что оптимальные значения варьируемых параметров k_{φ}^* и $k_{\dot{\varphi}}^*$ практически не изменяются при движении танка по различным грунтам и с различными скоростями и составляют $k_{\varphi}^* = 249$; $k_{\dot{\varphi}}^* = 50$. При этих значениях варьируемых параметров процессы наведения и стабилизации приведены на рис. 3.5 при различных значениях величины периода квантования цифрового электронного блока. Анализ рисунка 3.5 позволяет сделать вывод о том, что время наведения при $x_1(0) = 0,5$ рад не превышает 1 с, максимальное значение условий скорости поворота пушки в процессе наведения достигает $x_{2\max} = 2,3 \text{ с}^{-1}$, а значение аддитивного функционала (3.104) при $\beta_1 = 0,33$ и $\beta_2 = 0,835$ составляет $I^* = 0,6475 \text{ с}$ в предположении движения танка по асфальтобетону. Если величина периода квантования цифрового электронного блока превышает $T = 0,01 \text{ с}$, то качество процессов стабилизации заметно ухудшается.



3.7. Параметрический синтез инвариантных регулируемых систем

Центральной проблемой современной теории управления является создание систем автоматического управления способных эффективно функционировать в условиях неопределенности значений параметров системы, а также в условиях широкого спектра внешних возмущений, действующих на систему.

Понятия «инвариантность» и «робастность» тесно взаимосвязаны друг с другом. В самом деле, под инвариантностью системы автоматического управления понимают ее низкую чувствительность к изменению внешних возмущений, действующих на объект управления.

Под робастностью системы автоматического управления понимают ее низкую чувствительность к изменению параметров объекта управления, или, образно говоря, к изменению внутренних возмущений, действующих на объект.

Идея создания инвариантного стабилизатора танковой пушки изложена в работах [78, 79]. Дальнейшее развитие этой идеи нашло воплощение в создании стабилизатора башни танка Т-64Б с датчиком линейных ускорений танковой башни относительно собственной поперечной оси. Действительно, если танковая пушка статически уравновешена относительно оси цапф, то танковая башня с пушкой неуравновешенна относительно оси поворота. Поэтому составляющая линейного ускорения, возникающая при повороте танка и направленная вдоль собственной поперечной оси башни, вызывает создание возмущающего момента относительно оси поворота башни, который уводит башню с пушкой от заданного наводкой направления.

Если алгоритм стабилизации танковой башни использует информацию о линейном ускорении башни относительно ее поперечной оси, то стабилизатор танковой башни начинает формировать стабилизирующий момент еще до начала поворота башни, т. е. до появления сигналов на выходах датчиков угла поворота и угловой скорости поворота, что повышает точность и быстродействие замкнутой системы стабилизации и придает системе свойство инвариантности к действию внешних возмущений. В инвариантной системе стабилизации объединены два известных принципа регулирования – принцип регулирования по отклонению и принцип регулирования по возмущению. При такой комбинации двух принципов точность стабилизации оси канала ствола танковой пушки значительно возрастает.

В канале вертикального наведения угол возвышения пушки обычно невелик, так как танк ведет огонь по цели, находящейся в пределах прямой видимости. Поэтому внешнее возмущение от центробежной силы при повороте, действующей на танковую пушку в канале вертикального наведения, незначительно. При ведении танком боевых действий в условиях горной местности и, как следствие, при больших углах возвышения пуш-

ки влияние центробежных сил на ствол, вызванных поворотом корпуса танка, существенно возрастает. Это обстоятельство приводит к выводу о целесообразности использования инвариантного стабилизатора и в канале вертикального наведения.

Структурная схема инвариантного стабилизатора танковой пушки в канале вертикального наведения приведена на рис. 3.6. От штатного стабилизатора, предлагаемый инвариантный стабилизатор отличается наличием датчиков давления рабочей жидкости в плоскостях исполнительного гидроцилиндра 6 и 7. Момент внешних возмущений $M_B(t)$, приложенный к танковой пушке, передается на поршень исполнительного гидроцилиндра. При этом формируется разность давлений рабочей жидкости

$$\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

фиксируемая датчиками 6 и 7 практически мгновенно, до того, как возникает угловое отклонение оси канала ствола $\varphi(t)$ от направления на цель и появляется угловая скорость поворота $\dot{\varphi}(t)$. Если алгоритм стабилизации в канале вертикального наведения сформировать в виде

$$u(t) = k_\varphi k_\Gamma \varphi(t) + k_{\dot{\varphi}} k_c \dot{\varphi}(t) + k_p k_\Delta \Delta p(t), \quad (3.111)$$

где k_Δ — коэффициент усиления датчика давления; k_p — варьируемый коэффициент стабилизатора по каналу давления рабочей жидкости.

Математическую модель объекта управления (танковую пушку с электрогидравлическим усилителем) представим в виде системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} I \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} &= M_c(t) + M_B(t), \\ I_k \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + f_k \frac{d\beta(t)}{dt} + c_k \beta(t) &= \frac{k_e}{r_o} u(t); \\ T_\Gamma \frac{d\Delta p(t)}{dt} + \Delta p(t) &= k_d \beta(t), \end{aligned} \quad (3.112)$$

где $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ — обобщенная координата и обобщенная скорость стабилизируемого процесса; $M_c(t)$ — стабилизирующее воздействие; $M_B(t)$ — воз-

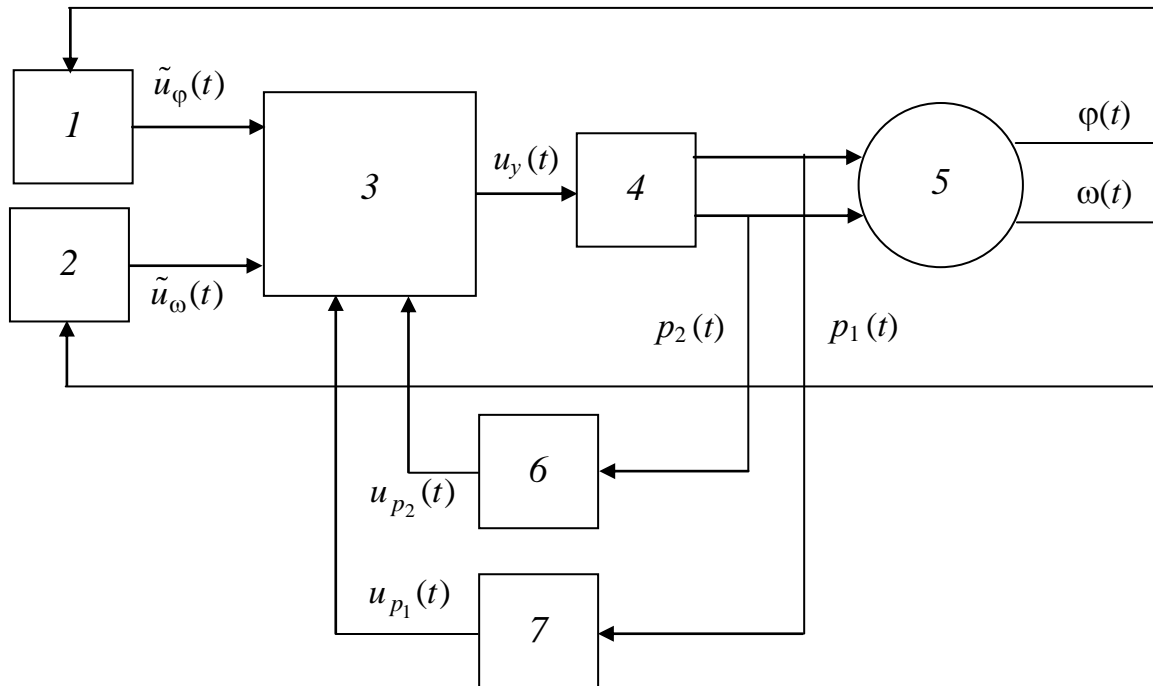


Рис. 3.6. Структурная схема инвариантной системы наведения и оптимизации танковой пушки

мушающее воздействие; I – момент инерции стабилизируемого объекта относительно оси поворота; $\beta(t)$ – угол поворота коромысла электромагнита управления; $\Delta p(t)$ – разность давлений рабочей жидкости в полостях исполнительного цилиндра гидроусилителя; $u(t)$ – управляющий сигнал, формируемый электронным блоком; I_k – момент инерции коромысла относительно его оси поворота; f_k – коэффициент жидкостного трения в оси поворота коромысла; c_k – коэффициент жесткости фиксирующей пружины коромысла; T_r – постоянная времени гидросистемы; k_e , k_d – коэффициенты пропорциональности; r_o – омическое сопротивление обмотки электромагнита наведения.

Стабилизирующий момент, создаваемый электрогидравлическим усилителем и прилагаемый к объекту стабилизации, составляет

$$M_c(t) = k_M \Delta p(t). \quad (3.113)$$

Вводя обозначения

$$\frac{I_k}{c_k} = T_1^2; \quad \frac{f_k}{c_k} = T_2; \quad \frac{k_e}{c_k r_o} = k_y; \quad \frac{k_M}{I} = k_\Pi$$

и подставляя соотношение (3.113) в систему (3.112), получаем математическую модель объекта стабилизации в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} &= k_{\Pi} \Delta p(t) + \frac{1}{I} M_{\text{в}}(t); \\ T_1^2 \frac{d^2\beta(t)}{dt^2} + T_2 \frac{d\beta(t)}{dt} + \beta(t) &= k_y u(t); \\ T_{\Gamma} \frac{d\Delta p(t)}{dt} + \Delta p(t) &= k_{\text{д}} \beta(t).\end{aligned}\tag{3.114}$$

Совокупность системы дифференциальных уравнений (3.114) и соотношение (3.111) представляет собой математическую модель замкнутой системы стабилизации танковой пушки.

Запишем соотношение для передаточной функции разомкнутой системы стабилизации

$$W_p(s) = \frac{k_{\Pi} k_{\text{д}} k_y [k_{\Phi} k_{\Gamma} + k_{\dot{\Phi}} k_{\text{с}} s]}{s^2 (T_{\Gamma} s + 1) (T_1^2 s^2 + T_2 s + 1 - k_{\text{д}} k_{\text{ц}} k_{\text{р}})}.\tag{3.115}$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы записывается

$$\begin{aligned}1 + W_p(s) &= T_1^2 T_{\Gamma} s^5 + (T_1^2 + T_2 T_{\Gamma}) s^4 + \\ &+ [T_2 + T_{\Gamma} (1 - k_{\text{д}} k_{\text{ц}} k_{\text{р}})] s^3 + (1 - k_{\text{д}} k_{\text{ц}} k_{\text{р}}) s^2 + \\ &+ k_{\Pi} k_{\text{д}} k_y k_{\text{с}} k_{\dot{\Phi}} s + k_{\Pi} k_{\text{д}} k_y k_{\Gamma} k_{\Phi} = 0.\end{aligned}\tag{3.116}$$

В работе [80] показано, что повышение степени инвариантности системы к действию внешних возмущений может быть достигнуто повышением порядка астатизма системы. Действительно, из анализа соотношения (3.115) следует, что порядок астатизма рассматриваемой системы равен двум. Если значение варьируемого параметра $k_{\text{р}}$ выбрать из условия

$$1 - k_{\text{д}} k_{\text{ц}} k_{\text{р}} = 0,\tag{3.117}$$

то соотношение (3.115) принимает следующий вид

$$W_p(s) = \frac{k_{\Pi} k_{\text{д}} k_y [k_{\Phi} k_{\Gamma} + k_{\dot{\Phi}} k_{\text{с}} s]}{s^3 (T_{\Gamma} s + 1) (T_1^2 s + T_2)}.\tag{3.118}$$

Таким образом, при выполнении условия (3.117) порядок астатизма системы повышается до трех, иными словами, обращаются в нуль первые три коэффициента ошибок замкнутой системы стабилизации, что приводит к повышению степени инвариантности замкнутой системы к действию внешних возмущений.

Вместе с тем, выполнение условия (3.117) приводит к тому, что замкнутая система стабилизации выходит на границу области устойчивости, в связи с тем, что становится равным нулю один из членов характеристического уравнения замкнутой системы (3.115) и система становится практически неработоспособной. Значение параметров системы примем равными: $I = 736,9 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $I_k = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $f_k = 0,55 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $r_0 = 30 \text{ Ом}$; $c_k = 1,01 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $k_e = 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-1}$; $k_{\text{ц}} = 1,098 \cdot 10^{-7} \text{ В} \cdot \text{Па}^{-1}$; $k_{\Gamma} = 1 \text{ В}$; $k_c = 0,2 \text{ В} \cdot \text{с}$; $T_{\Gamma} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ с}$; $k_m = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Па}^{-1}$.

Тогда $T_1^2 = 0,97 \cdot 10^{-4} \text{ с}^2$; $T_2 = 0,54 \cdot 10^{-2} \text{ с}$; $k_{\text{п}} = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$; $k_y = 0,33 \text{ В}^{-1}$, а характеристическое уравнение замкнутой системы (3.115) принимает вид

$$0,1164 \cdot 10^{-7} s^5 + 0,9765 \cdot 10^{-4} s^4 + 0,54 \cdot 10^{-2} s^3 + (1 - 1,359 k_p) s^2 + 0,65 \cdot k_{\dot{\varphi}} s + 3,268 \cdot k_{\varphi} = 0. \quad (3.119)$$

В уравнение (3.119) положим $s = j\omega$ и построим области устойчивости замкнутой системы при различных значениях k_p , представленные на рис. 3.7.

В области устойчивости, соответствующей значению $k_p = 0$ выберем точку с координатами $k_{\varphi}^* = 85,6$ и $k_{\dot{\varphi}}^* = 42,8$. При выбранных значениях варьируемых параметров построим корневые годографы замкнутой системы в зависимости от величины k_p , представленные на рис. 3.8.

Из анализа рисунков можно сделать вывод, что с возрастанием величины k_p степень устойчивости системы уменьшается и при $k_p = 0,328$ комплексно-сопряженные корни s_2 и s_3 характеристического уравнения (3.119) попадают на мнимую ось плоскости корней, что соответствует потере замкнутой системой устойчивости. Во избежание этого можно задать минимально-допустимой степенью устойчивости замкнутой системы стабилизации например, $\alpha = 6$. Этому значению степени устойчивости соответствует величина параметра k_p равная $k_p^* = 0,2$. Однако такое

значение параметра k_p не приведет к заметному повышению степени астатизма замкнутой системы и, следовательно, к повышению степени ее инвариантности к действию внешних возмущений.

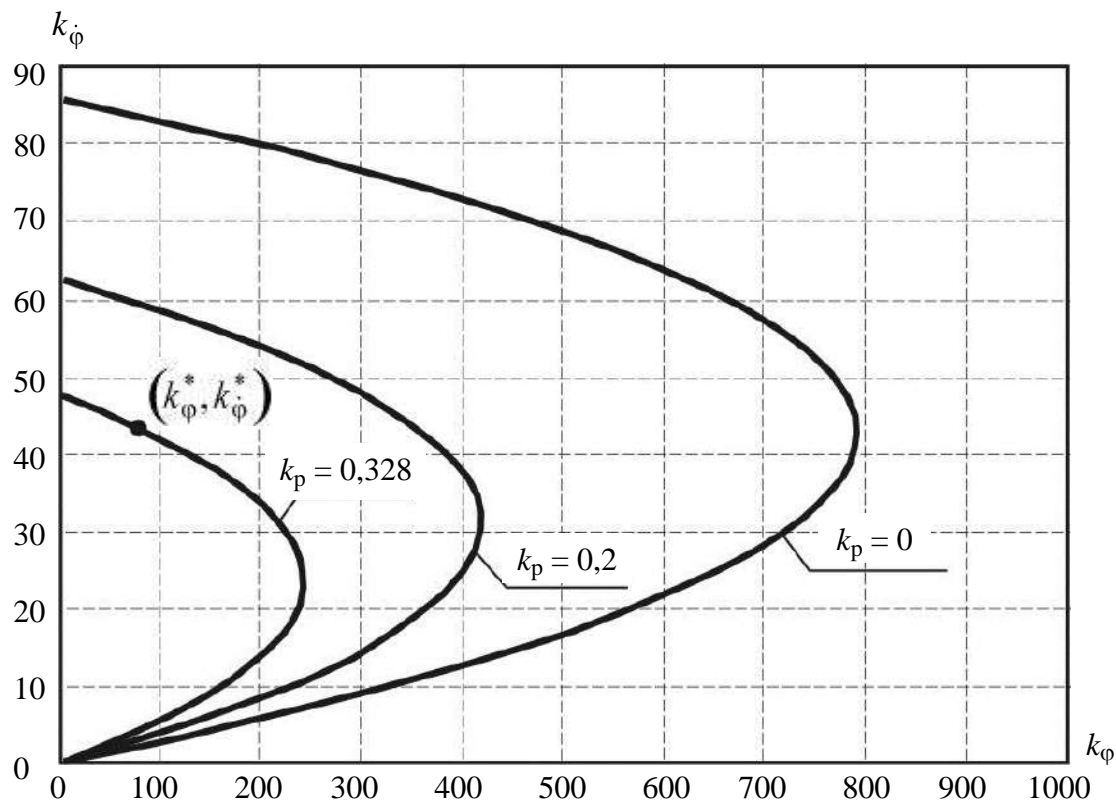


Рис. 3.7. Области устойчивости в плоскости варьируемых параметров $(k_\phi, k_{\dot{\phi}})$ при различных значениях варьируемого параметра k_p

В работе [80] для придания системе автоматического управления свойства инвариантности к действию внешних возмущений, помимо повышения порядка астатизма, предлагается также использование управления по производным от ошибки. Действительно, представим сигнал, формируемый электронным блоком стабилизации, в виде

$$u(t) = k_\phi u_\phi(t) + k_{\dot{\phi}} u_{\dot{\phi}}(t) + k_{\ddot{\phi}} u_{\ddot{\phi}}(t) + k_p u_p(t), \quad (3.120)$$

где $u_{\ddot{\phi}}(t)$ – сигнал, пропорциональный угловому ускорению объекта

$$u_{\ddot{\phi}}(t) = k_a \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}. \quad (3.121)$$

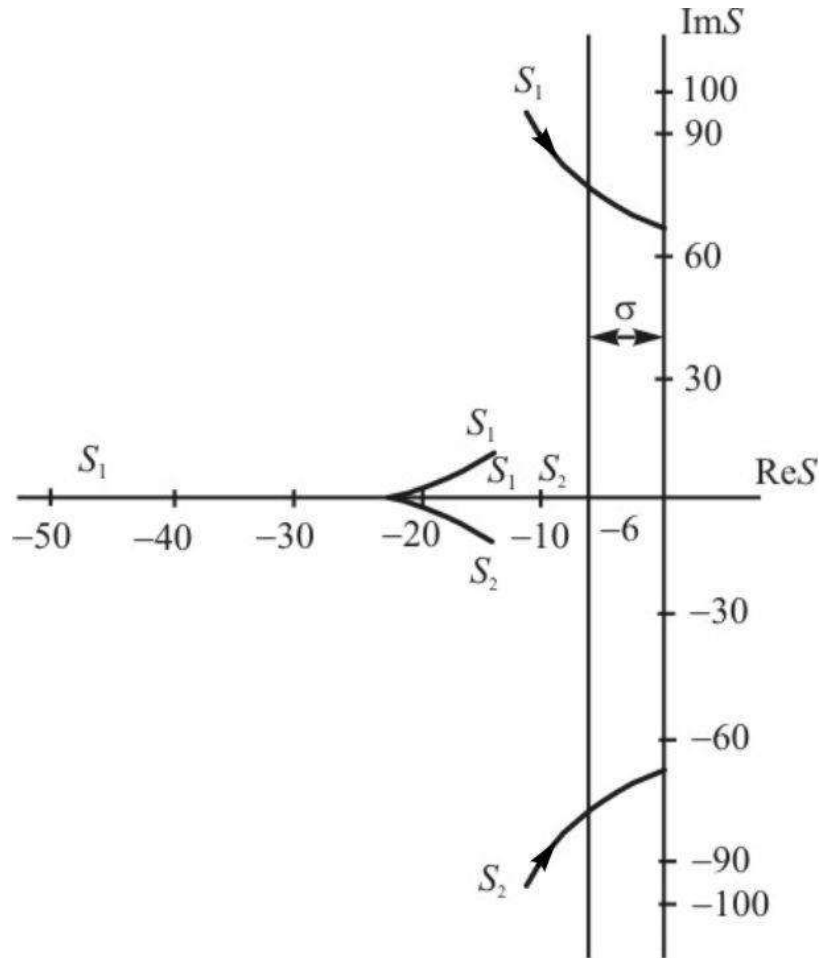


Рис. 3.8. Корневые годографы замкнутой САУ при изменении варьируемого параметра k_p

С учетом соотношений (3.120) и (3.121) передаточная функция разомкнутой системы стабилизации записывается в виде

$$W_p(s) = \frac{k_{\Pi} k_{\Delta} k_y [k_{\Phi} k_{\Gamma} + k_{\dot{\Phi}} k_c s + k_{\ddot{\Phi}} k_a s^2]}{s^2 (T_{\Gamma} s + 1) (T_1^2 s^2 + T_2 s + 1 - k_{\Delta} k_{\Pi} k_p)}. \quad (3.122)$$

В результате характеристическое уравнение замкнутой системы стабилизации принимает следующий вид

$$\begin{aligned} T_1^2 T_{\Gamma} s^5 + (T_1^2 + T_2 T_{\Gamma}) s^4 + [T_2 + T_{\Gamma} (1 - k_{\Delta} k_{\Pi} k_p)] s^3 + \\ + [(1 - k_{\Delta} k_{\Pi} k_p) + k_{\Pi} k_{\Delta} k_c k_{\dot{\Phi}}] s^2 + k_{\Pi} k_{\Delta} k_y k_{\Gamma} k_{\dot{\Phi}} s + \\ + k_{\Pi} k_{\Delta} k_y k_{\Gamma} k_{\Phi} = 0. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Разрешим уравнение (3.123) относительно варьируемого параметра $k_{\ddot{\varphi}}$ и в полученном соотношении произведем замену $s = j\omega$. Тогда, с учетом значений варьируемых и неварьируемых параметров системы, получаем

$$\begin{aligned} k_{\ddot{\varphi}} &= X(\omega) + jY(\omega) = \\ &= 0,297 \cdot 10^{-4} \omega^2 - 0,306(1 - 359 \cdot k_p) + \frac{85,63}{\omega} + \\ &+ j \left[\frac{0,306}{\omega} (27,82 - 0,54 \cdot 10^{-2} \omega^2 + 0,1164 \cdot 10^{-7} \omega^4) \right]. \end{aligned} \quad (3.124)$$

В комплексной плоскости ($X(\omega)$, $Y(\omega)$) построим в соответствии с соотношением (3.124) кривую, ограничивающую на действительной оси отрезок, представляющий собой область устойчивости замкнутой системы (рис. 3.9). Анализ рис. 3.9 приводит к выводу, что при $a = 0,1 \leq k_p^* \leq b = 13,2$ замкнутая система стабилизации является устойчивой в широком диапазоне изменения варьируемого параметра k_p , в частности, при $k_p^* = 0,736$, что обеспечивает условие (3.117), доставляющее системе стабилизации астатизм третьего порядка и обращение в нуль первых трех коэффициентов ошибок.

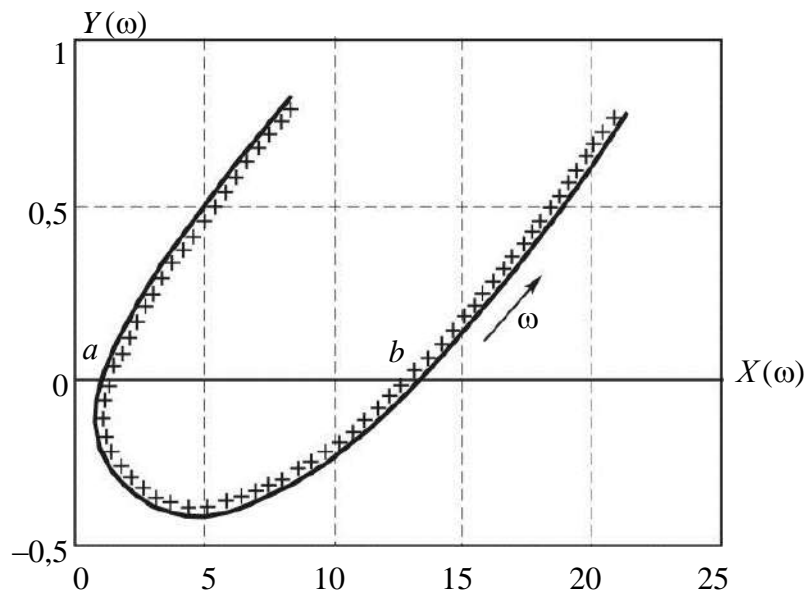


Рис. 3.9. Область устойчивости в плоскости комплексного параметра $k_{\ddot{\varphi}}$

Управляющий сигнал, формируемый цифровым электронным блоком, имеет следующую структуру

$$\sigma_{\varphi}[nT] = k_{\varphi}u_{\varphi}[nT] + k_{\dot{\varphi}}u_{\dot{\varphi}}[nT] + k_p u_p[nT] + k_{\ddot{\varphi}}u_{\ddot{\varphi}}[nT], \quad (3.125)$$

где решетчатые функции $u_{\varphi}[nT]$, $u_{\dot{\varphi}}[nT]$, $u_p[nT]$ и $u_{\ddot{\varphi}}[nT]$ получены в результате обработки выходных сигналов датчиков цифровым электронным блоком стабилизатора, а коэффициенты k_{φ} , $k_{\dot{\varphi}}$, k_p и $k_{\ddot{\varphi}}$ являются варьируемыми параметрами цифрового блока стабилизатора.

На рис. 3.10 представлена логическая схема алгоритма стабилизации, регулируемого цифровым электронным блоком системы наведения и стабилизации танковой пушки. На рисунке приняты следующие обозначения: ГДУ – гироскопический датчик угла; ГДУС – гироскопический датчик угловой скорости; ДД – датчик давления; ЦЭБ – цифровой электронный блок; В – выпрямитель; ПАК – преобразователь «аналог – код»; ФБ – фильтр Баттеруорта; ФЛ – фильтр Ланцоша; У – усилитель цифрового сигнала; ПКА – преобразователь «код – аналог».

Выходные сигналы гироскопических датчиков и датчиков давления являются высокочастотными сигналами переменного тока частотой 400–500 Гц, амплитуды которых пропорциональны углам поворота рамок гироскопических датчиков и давлению рабочей жидкости в полостях исполнительного гидроцилиндра. Поступая на вход ЦЭБ, эти сигналы выпрямляются выпрямителями В1–В4 и в виде сигналов постоянного тока $\varphi(t)$, $\omega_{\varphi}(t)$, $p_1(t)$ и $p_2(t)$ поступают на входы ПАК. На выходе ПАК имеют место решетчатые функции $\varphi[nT]$, $\omega_{\varphi}[nT]$, $p_1[nT]$ и $p_2[nT]$, представляющие собой последовательности мгновенных импульсов, равноотстоящих друг от друга на величину периода квантования T .

В работе [81] показано, что рамки гироскопических датчиков совершают высокочастотные колебания, являющиеся помехами полезных сигналов $\varphi[nT]$ и $\omega_{\varphi}[nT]$. Давление рабочей жидкости в полостях исполнительного гидроцилиндра также измеряется с погрешностью, обусловленной автоколебаниями рабочей жидкости в гидросистеме стабилизатора [82]. Для фильтрации высокочастотных помех в ЦЭБ используются цифровые низкочастотные фильтры Баттеруорта второго порядка, реализуемые с помощью соотношений [83]:

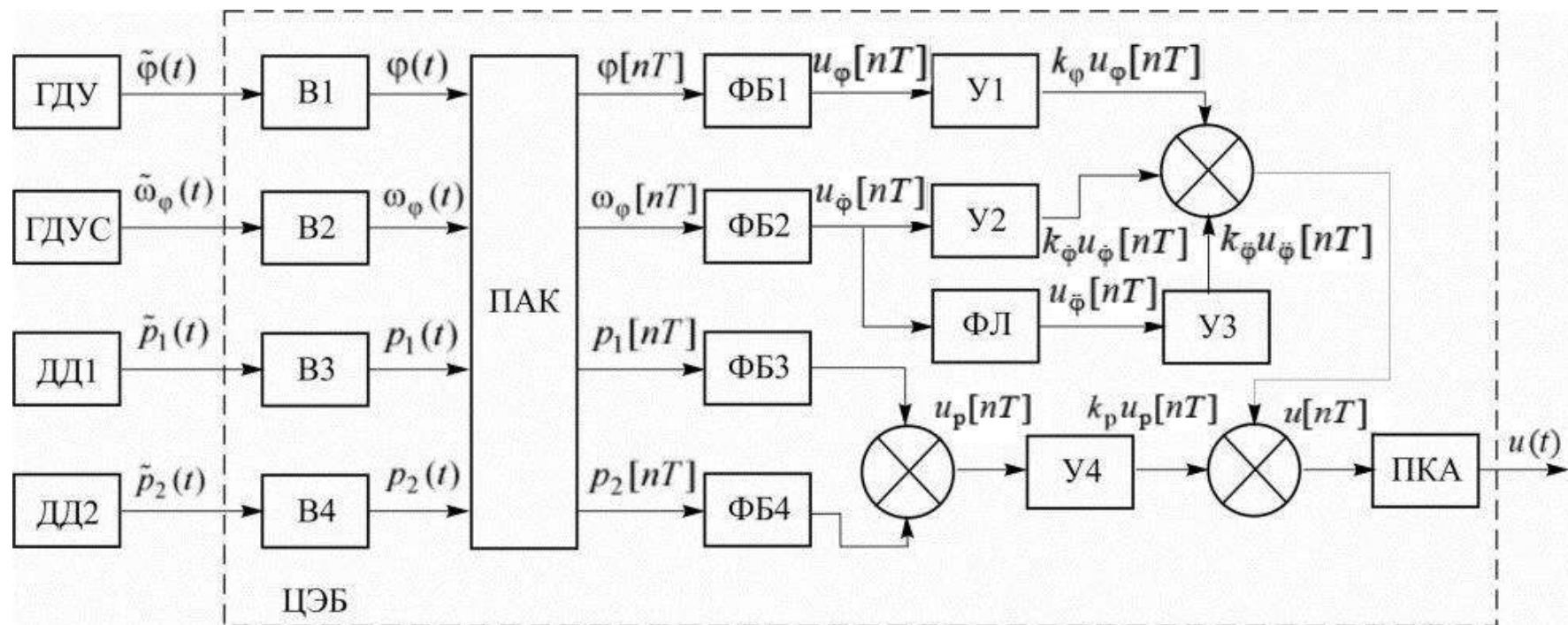


Рис. 3.10. Логическая схема алгоритма стабилизации

$$u_{\varphi}[nT] = a_1 \{ \varphi[nT] + 2\varphi[(n-1)T] + \varphi[(n-2)T] \} - d_1 u_{\varphi}[(n-1)T] - d_2 u_{\varphi}[(n-2)T]; \quad (3.126)$$

$$u_{\dot{\varphi}}[nT] = a_1 \{ \omega_{\varphi}[nT] + 2\omega_{\varphi}[(n-1)T] + \omega_{\varphi}[(n-2)T] \} - d_1 u_{\dot{\varphi}}[(n-1)T] - d_2 u_{\dot{\varphi}}[(n-2)T]; \quad (3.127)$$

$$u_{p1}[nT] = a_1 \{ p_1[nT] + 2p_1[(n-1)T] + p_1[(n-2)T] \} - d_1 u_{p1}[(n-1)T] - d_2 u_{p1}[(n-2)T]; \quad (3.128)$$

$$u_{p2}[nT] = a_1 \{ p_2[nT] + 2p_2[(n-1)T] + p_2[(n-2)T] \} - d_1 u_{p2}[(n-1)T] - d_2 u_{p2}[(n-2)T]; \quad (3.129)$$

$$u_p[nT] = u_{p1}[nT] - u_{p2}[nT]. \quad (3.130)$$

Для отыскания решетчатой функции $u_{\dot{\varphi}}[nT]$ используем фильтр Ланцоша 2-го порядка, реализуемый с помощью соотношения [84]

$$u_{\ddot{\varphi}}[nT] = c_0 u_{\dot{\varphi}}[nT] + c_1 u_{\dot{\varphi}}[(n-1)T] - c_1 u_{\dot{\varphi}}[(n-3)T] - c_0 u_{\dot{\varphi}}[(n-4)T]. \quad (3.131)$$

Подставляя в правую часть соотношения (3.125) алгоритмы (3.126)–(3.131), получаем алгоритм формирования решетчатой функции управления $u[nT]$ инвариантного стабилизатора танковой пушки в канале вертикального наведения.

Для отыскания варьируемых констант стабилизатора k_{φ} , $k_{\dot{\varphi}}$, k_p и $k_{\ddot{\varphi}}$ воспользуемся методикой, изложенной в статье [85].

Точность стабилизатора будем оценивать значением интегрального квадратного функционала

$$I = \int_0^{\tau} [\beta_1^2 \varphi^2(t) + \beta_2^2 \dot{\varphi}^2(t)] dt, \quad (3.132)$$

вычисленного на решениях замкнутой системы (3.114), (3.110) при заданном изменении внешнего возмущающего момента. Отличие от задачи,

рассмотренной в предыдущем подразделе, состоит только лишь в том, что решетчатая функция $\sigma_{\varphi}[nT]$ задается в виде (3.124).

Внешнее возмущение $M_f(t)$ выберем в соответствии с методикой, предложенной в статьях [86, 87]. Участок возрастания функции $M_f(t)$ соответствует входу танка в поворот. Участок постоянства функции $M_f(t)$ соответствует равномерному повороту, а участок убываний функции $M_f(t)$ соответствует выходу танка из поворота.

Задачу параметрического синтеза цифрового инвариантного стабилизатора танковой пушки сформируем следующим образом. Требуется отыскать значения варьируемых констант алгоритма (3.125), которые на решениях замкнутой системы при заданном изменении функции $M_f(t)$ доставляют минимум интегральному квадратичному функционалу (3.132).

Значения параметров цифровых низкочастотных фильтров примем равными $a_1 = 0,1219$; $d_1 = -1,2401$; $d_2 = 0,4572$; $c_0 = 5$; $c_1 = 2,5$, а функцию внешнего возмущения $M_f(t)$ запишем в виде соотношения [87]

$$M_f(t) = \begin{cases} 200t, & 0 \leq t < 1; \\ 200, & 1 \leq t < 3; \\ 200(4-t), & 3 \leq t < 4; \\ 0, & t \geq 4. \end{cases}$$

Используя рассмотренный в [85] алгоритм параметрического синтеза системы наведения и стабилизации танковой пушки, получаем следующие значения варьируемых параметров инвариантного алгоритма стабилизации $k_{\varphi}^* = 249$; $k_{\dot{\varphi}}^* = 50$; $k_p^* = 0,736$; $k_{\ddot{\varphi}}^* = 5,26$.

Таким образом, для придания замкнутой системе стабилизации подвижного объекта свойства инвариантности к действию внешнего возмущения при сохранении требуемого запаса устойчивости необходимо, помимо реализации комбинированного принципа построения системы стабилизации, ввести в алгоритм стабилизации контур управления по угловому ускорению объекта. С целью обеспечения необходимого уровня помехозащищенности цифрового стабилизатора, для оценки углового ускорения объекта целесообразно использование цифрового низкочастотного фильтра Ланцоша.

3.8. Параметрический синтез робастных регулируемых систем

В процессе эксплуатации любой технической системы значения ее параметров в той или иной мере отклоняются от своих номинальных значений, что приводит к изменению динамических характеристик системы. Техническую систему будем называть робастной, если отклонения ее параметров от своих номинальных значений не приводят к существенному изменению ее динамических характеристик. С понятием робастности технической системы тесно связано понятие чувствительности системы к изменению ее параметров, иными словами, система является робастной, если она обладает малой чувствительностью к изменению своих конструктивных параметров.

Так, например, варьируемыми параметрами системы наведения и стабилизации танковой пушки являются константы алгоритма стабилизации k_φ и $k_{\dot{\varphi}}$, оптимальные значения которых k_φ^* и $k_{\dot{\varphi}}^*$, равные $k_\varphi^* = 50$ и $k_{\dot{\varphi}}^* = 125$, получены в результате применения к системе (1.37), (1.38), (3.110) и функционалу (3.107) алгоритма параметрического синтеза, описанного в разделе 3.6, при номинальных значениях конструктивных параметров системы. Вместе с тем, значения коэффициента вязкости рабочей жидкости гидросистемы стабилизатора канала вертикального наведения изменяется в широком диапазоне в зависимости от температуры окружающей среды, которая может изменяться в интервале $(-40 \div +50)^\circ\text{C}$. Поэтому значения варьируемых параметров стабилизатора k_φ^* и $k_{\dot{\varphi}}^*$, оптимальные для номинальной температуры $+10^\circ\text{C}$, не являются таковыми для других значений температуры окружающей среды, что неизбежно приводит к снижению точности стабилизации оси канала ствола танковой пушки относительно линии прицеливания.

В основу предлагаемой методики построения робастной динамической системы положены следующие рассуждения [38, 39]. Функционал, вычисленный на решениях математической модели динамической системы

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha, \beta] + F(t), \quad (3.133)$$

где α – s -мерный вектор варьируемых параметров; β – нестабильный параметр динамической системы, обозначим через

$$I(\alpha, \beta) = \underline{M}_{(j=1, N)} \left\{ \int_0^T \langle X^j(t, \alpha, \beta), Q X^j(t, \alpha, \beta) \rangle dt \right\}, \quad (3.134)$$

причем $X^j(t, \alpha, \beta)$ – решение системы (3.133), соответствующее j -й реализации вектора $F(t)$.

Чувствительность критерия оптимальности (3.134) к изменению неустойчивого параметра β оценим производной

$$\left[\left[\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta_0} \right], \quad (3.135)$$

где β_0 – номинальное значение неустойчивого параметра.

Вектор варьируемых параметров $\alpha \in G_\alpha$ выбирается из условия минимума аддитивного функционала

$$I(\alpha) = \gamma_1^2 I(\alpha, \beta_0) + \gamma_2^2 \left[\left[\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta_0} \right], \quad (3.136)$$

где весовые коэффициенты γ_1 и γ_2 выбираются согласно методике, описанной в разделе 2.7, а производная (3.135) вычисляется по формуле

$$\left[\left[\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta=\beta_0} \right] = \left[\left[\frac{I(\alpha, \beta + \delta\beta) - I(\alpha, \beta - \delta\beta)}{2\delta\beta} \right]_{\beta=\beta_0} \right],$$

где $\delta\beta$ – вариация неустойчивого параметра β .

Для математической модели (1.37), (1.38), (3.110) аддитивный функционал (3.135) записывается в виде:

$$\begin{aligned} I(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = & \gamma_1^2 \left(\underline{M}_{(j=1, N)} \right) \left\{ \int_0^T \left[\beta_1^2 \varphi_j^2(t, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, f_0) + \beta_2^2 \dot{\varphi}_j^2(t, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, f_0) \right] dt + \right. \\ & + \gamma_2^2 \left[\frac{1}{2\delta f} \left[\left(\underline{M}_{(j=1, N)} \right) \left\{ \int_0^T \left[\beta_1^2 \varphi_j^2(t, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, f_0 + \delta f) + \beta_2^2 \dot{\varphi}_j^2(t, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, f_0 + \delta f) \right] dt \right\} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\underline{M}_{(j=1, N)} \right) \left\{ \int_0^T \left[\beta_1^2 \varphi_j^2(t, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, f_0 - \delta f) + \beta_2^2 \dot{\varphi}_j^2(t, k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}, f_0 - \delta f) \right] dt \right\} \right] \right] \right\}. \quad (3.137) \end{aligned}$$

Минимизация по k_φ и $k_{\dot{\varphi}}$ и аддитивного функционала (3.137), вычисляемого на решениях замкнутой системы (1.37), (1.38), (3.110), осуществляемая с помощью алгоритма параметрического синтеза, описанного в 3.6, приводит к следующим значениям варьируемых констант алгоритма стабилизации $k_\varphi^* = 157,42 \text{ В}$; $k_{\dot{\varphi}}^* = 50 \text{ В}\cdot\text{с}$.

3.9. Параметрический синтез регулируемых динамических систем с регулятором переменной структуры

Обычно выбор структуры динамической системы осуществляется исходя из предположения, что совокупность функциональных элементов и характер связей между ними остаются раз и навсегда неизменными. Однако такой взгляд на проектирование технических объектов не является единственным. Действительно, при проектировании динамической системы можно заранее в структуру системы ввести такие функциональные элементы, которые во время протекания динамического процесса скачкообразно изменяют структуру динамической системы. Тогда, в зависимости от выбранного алгоритма и информации о состоянии системы, последняя будет иметь ту или иную структуру. В такой системе удастся сочетать полезные свойства каждой из имеющейся совокупности структур и получить новые свойства, не присущие каждой из структур в отдельности. Следует ожидать, что такой подход позволит существенно повысить динамические характеристики системы.

Результаты общей теории систем с переменной структурой, изложенной в работах [19, 20], кратко можно сформулировать в виде следующих тезисов:

- в классе систем с переменной структурой достигается повышение быстродействия системы по сравнению с линейной системой;
- в динамических системах с переменной структурой имеют место два режима работы – движение по фазовым траекториям и движение по поверхностям переключения, причем режим движения по поверхности переключения с бесконечно большой частотой переключения структуры, называется скользящим режимом;
- при работе динамической системы с переменной структурой в скользящем режиме система приобретает свойство инвариантности

к действию внешних возмущений и свойство робастности к изменению значений нестабильных параметров.

Указанные свойства динамических систем с переменной структурой определяет их привлекательность для использования в стабилизаторах танковой пушки.

Рассмотрим математическую модель замкнутой системы наведения и стабилизации танковой пушки (1.37), (1.38), (3.110). Будем предполагать, что значения варьируемых параметров k_φ и $k_{\dot{\varphi}}$ изменяются в соответствии с алгоритмом

$$k_\varphi = \bar{k}_\varphi \operatorname{sign}[x_1(t) S(t)]; \quad (3.138)$$

$$k_{\dot{\varphi}} = \bar{k}_{\dot{\varphi}} \operatorname{sign}[x_2(t) S(t)], \quad (3.139)$$

причем

$$S(t) = x_2(t) + \lambda x_1(t). \quad (3.140)$$

В качестве варьируемых параметров замкнутой системы (1.37), (1.38), (3.110), (3.138)–(3.140) выберем \bar{k}_φ , $\bar{k}_{\dot{\varphi}}$ и λ . Использование алгоритма параметрического синтеза, изложенного в разделе 3.6, приводит к следующим оптимальным значениям этих параметров: $\bar{k}_\varphi^* = 150$; $\bar{k}_{\dot{\varphi}}^* = -36$; $\lambda^* = 5,54 \text{ с}^{-1}$.

Процессы наведения и стабилизации в замкнутой динамической системе с переменной структурой приведены на рис. 3.11. Стабилизатор переменной структуры обеспечивает апериодический характер процессов наведения. Быстродействие стабилизатора переменной структуры практически не отличается от быстродействия линейного пропорционального дифференциального стабилизатора при оптимальных значениях варьируемых параметров $k_\varphi^* = 249$; $k_{\dot{\varphi}}^* = 50$, однако максимальное значение угловой скорости поворота пушки для стабилизатора переменной структуры при $x_1(0) = 0,5$ раз не превышает величины $x_{2\max} = 1,8 \text{ с}^{-1}$, а значение функционала (3.132) при движении танка по асфальтобетону составляет $I = 0,3845 \text{ с}$.

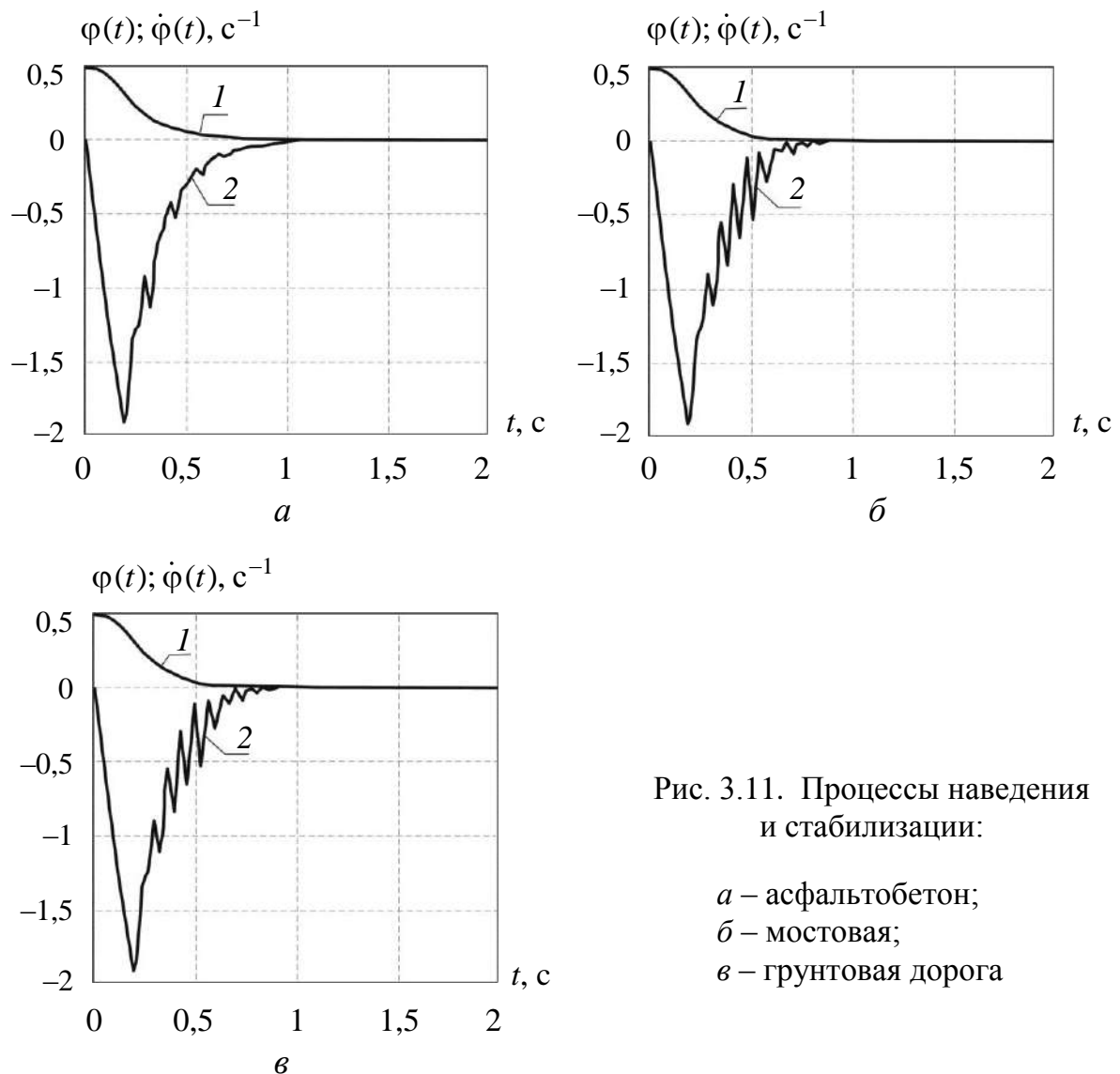


Рис. 3.11. Процессы наведения и стабилизации:

a – асфальтобетон;
б – мостовая;
в – грунтовая дорога

Контрольные вопросы к разделу 3

1. Запишите преобразования Фурье, связывающие корреляционную функцию и спектральную плотность стационарного случайного процесса.
2. Запишите связь между спектральными плотностями стационарных случайных процессов на входе динамического звена.
3. Запишите матрицу интенсивности векторного случайного воздействия.
4. Дайте определение формирующего динамического звена.
5. Запишите стохастическое уравнение Ляпунова динамической системы, подверженной случайному векторному внешнему возмущению.

6. Опишите последовательность перехода от математической модели возмущенного движения системы с ЭВМ в контуре управления к уравнениям в конечных разностях.

7. Опишите последовательность перехода от математической модели возмущенного движения дискретно-континуальной динамической системы к математической модели, содержащей только обыкновенные дифференциальные уравнения.

8. Охарактеризуйте особенности «сложных» динамических систем.

9. Поясните принцип алгоритмической оптимизации стохастических динамических систем.

10. Дайте определение свойству инвариантности динамической системы.

11. Как соотносятся свойства инвариантности и устойчивости динамической системы?

12. Дайте определение свойству робастности регулируемой динамической системы.

13. Дайте определение скользящего режима в регулируемой динамической системе с переменной структурой регулятора.

14. Перечислите положительные свойства динамических систем с переменной структурой регулятора при работе в скользящем режиме.

Раздел 4

ОСНОВЫ МЕТОДОВ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

4.1. Введение в методы оптимизации

Данный раздел посвящен определению и рассмотрению тех основных понятий, которые будут изучаться во всем курсе «Методы оптимизации». Различается оптимизация в широком и узком смысле, показывается происхождение термина «оптимизация», определяется предмет методов оптимизации, обосновывается необходимость изучения многих методов оптимизации. Вводятся понятия переменных параметров оптимизации, пространства параметров и допустимой области, критерия качества и целевой функции, задачи оптимизации и решения задачи оптимизации, метода оптимизации. Рассматриваются примеры задач оптимизации, показывается полезность их решения и важность применения современных эффективных методов. Рассматриваются различные принципы классификации методов оптимизации и дается классификация методов по применяемым средствам, по математической формулировке задач оптимизации, по порядку производных.

Предмет методов оптимизации

Слово «*оптимальный*» в переводе с греческого *optimus* означает «наилучший», поэтому *оптимизация в широком смысле* означает поиск наилучшего варианта из множества различных альтернатив.

Оптимизация различных объектов и их систем является основой инженерной деятельности, поскольку цель труда любого инженера – это создание новых, более эффективных систем при использовании меньших возможных ресурсов, в том числе финансовых. В настоящее время знание методов оптимизации студентами высшей школы так же необходимо, как и знание основ математического анализа, физики, информатики и других дисциплин.

Для поиска наилучшего варианта некоторой системы необходимо задать для нее критерий качества и определить, с помощью каких параметров на него можно воздействовать. Выбранный критерий качества представляет функцию переменных параметров, которую необходимо минимизировать или максимизировать. *Оптимизация в узком смысле* заключается в минимизации или максимизации функции при наличии или отсутствии ограничений.

Оптимизация может осуществляться различными средствами – как с помощью простой арифметики, так и с помощью сложных аналитических и численных процедур. Существует множество методов оптимизации, самыми мощными из которых являются численные методы, которые наиболее полно используют возможности современной вычислительной техники.

Термин «оптимизация» впервые ввёл в математике Лейбниц. Методы оптимизации начали развиваться после Второй мировой войны, а большинство классических методов оптимизации создано в 50–60-е годы прошлого века. Наравне с понятием методов оптимизации применяют его синоним – *математическое программирование*. С другой стороны, математическое программирование является частью исследования операций – подраздела вычислительной математики, изучающего свойства различных операций.

Операцией в математике называется отображение декартового произведения некоторых множеств в другое множество:

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow M.$$

Распространенным примером операции является функция нескольких переменных $f(x)$, поэтому исследование функций – это часть исследования операций.

Запросы человеческой деятельности ставят множество задач оптимизации различных типов, и даже для разных задач одинакового типа не существует единого универсального метода решения. Это приводит к настоящей необходимости изучения многих методов оптимизации и анализа их достоинств и недостатков с целью наиболее эффективного применения методов.

Человеческий гений изобрел множество эффективных численных методов оптимизации, которые имеют большую как познавательно-мето-

дическую, так и практическую ценность. Численные методы для решения различных типовых задач оптимизации и составляют предмет учебной дисциплины «Методы оптимизации».

Понятия и определения теории оптимизации

Для формального представления задач оптимизации и методов их решения необходимо ввести основные понятия и определения теории оптимизации.

1. *Параметры оптимизации* x_1, x_2, \dots, x_n – это те независимые переменные, которые можно изменять при решении задачи оптимизации, n – число переменных. Эти переменные также называются *переменными* или *варьируемыми параметрами*. Упорядоченный набор переменных образует *вектор переменных параметров* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Будем полагать, что каждый параметр принадлежит множеству вещественных чисел $R = (-\infty, +\infty)$: $x_i \in R, i = \overline{1, n}$.

2. *Пространство параметров* – это множество векторов переменных параметров x , образующих n -мерное пространство R^n . При этом полагают, что пространство параметров представляет декартово произведение n множеств вещественных чисел $R^n = R \times R \times \dots R \rightarrow M$. Для фиксированного вектора x его можно представить точкой пространства параметров. Размерность пространства параметров n определяется размерностью его вектора x , для чего используется обозначение $n = \dim x$. Здесь \dim – это сокращение от английского слова *dimension* – размерность.

3. *Допустимая область* – это множество векторов параметров, удовлетворяющих ограничениям оптимизационной задачи, и обозначаемое символом D . Ограничения могут задаваться в виде равенств и неравенств:

$$D = \{ x | g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, p}; h_j(x) = 0, j = \overline{1, r} \}.$$

При наличии ограничений говорят о задаче условной оптимизации, а при их отсутствии – о задаче безусловной оптимизации.

4. *Критерий качества* – это функционал, отображающий качество оптимизируемой системы. Функционал – это любой оператор, результатом которого является число. Критерий качества обычно представляется функцией вектора переменных параметров $f(x)$, принимающей веще-

ственные значения. Такая функция выполняет математическую операцию отображения пространства R^n в R , т. е. $f: R^n \rightarrow R$.

5. *Целевая функция* – это критерий качества с указанием типа его оптимальности (минимальности или максимальности): $f(x) \rightarrow \min$ или $f(x) \rightarrow \max$. При разработке современного программного обеспечения методов оптимизации для определенности полагают, что целевую функцию необходимо минимизировать. Если необходима максимизация целевой функции $g(x)$ ($g(x) \rightarrow \max$), то переходят к вспомогательной функции $f(x) = -g(x)$, минимизация которой приведет к максимизации исходной функции:

$$f(x) \rightarrow \min \Rightarrow g(x) \rightarrow \max.$$

Если $g(x) \neq 0$, то можно также положить $f(x) = 1/g(x)$.

Таким образом, любую задачу максимизации целевой функции можно свести к соответствующей задаче минимизации.

6. *Задача оптимизации* – это задача, которая заключается в минимизации целевой функции $f(x)$ при отсутствии или наличии дополнительных условий. Если дополнительные условия отсутствуют, то имеет место задача безусловной оптимизации, которая заключается в минимизации целевой функции $f(x)$ и кратко записывается в виде $\min f(x)$. Если имеются дополнительные условия в виде обязательной принадлежности вектора переменных x допустимой области D , то ставится задача условной оптимизации, которая записывается в виде $\min_{x \in D} f(x)$. При известной целевой функции $f(x)$ и допустимой области D говорят, что задана модель задачи оптимизации.

7. *Решение задачи оптимизации* – это значение вектора переменных параметров x^* , которое удовлетворяет условию задачи оптимизации. Решение задачи безусловной оптимизации определяют равенствами:

$$f(x^*) = \min f(x) \quad \text{или} \quad x^* = \arg \min f(x).$$

Оптимальное значение целевой функции обозначается через $f^* = f(x^*)$.

8. *Метод оптимизации* – это метод для выполнения итерационного процесса решения задачи оптимизации, который позволяет исключить

полный перебор вариантов и получить решение задачи x^* более рациональным способом. Любой метод оптимизации формирует последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ в пространстве параметров R^n , которая должна сходиться к решению задачи оптимизации: $x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$. Эффективность метода оптимизации определяется как полученной точностью решения задачи оптимизации, так и величиной затраченных на ее решение вычислительных ресурсов.

Классификация методов оптимизации

Для успешного применения методов оптимизации необходимо четко представлять их назначение и возможности. Существует множество методов оптимизации, которые можно классифицировать по различным признакам. Рассмотрим основные признаки классификации.

1. По применяемым средствам.

1. Аналитические методы. Используют классические методы дифференциального исчисления. Для решения задач безусловной оптимизации применяется необходимое условие экстремума – равенство нулю производных целевой функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для решения задач условной оптимизации используется метод множителей Лагранжа. Аналитические методы дают возможность получить точное решение задачи оптимизации. Общий их недостаток в том, что они могут применяться только для простых задач с дифференцируемыми целевыми функциями, заданными аналитически, при небольшом числе переменных.

2. Методы перебора вариантов. Анализируются различные варианты решения задачи оптимизации и путем их сравнения выбирается наилучший вариант. Недостаток этих методов состоит в их большой трудоемкости и малой точности.

3. Графические методы. Основаны на построении графиков функций одной или нескольких переменных. Экстремум функции определяется непосредственно путем анализа ее графика. Они просты и наглядны, сразу

показывают, существует ли решение. Применимы только для малого числа переменных.

4. Численные методы. Самый широкий класс методов, наиболее полно использующий возможности современной вычислительной техники. Это итерационные методы, которые заключаются в последовательном переходе от одного решения $x^{(k)}$ к лучшему решению $x^{(k+1)}$. В отличие от аналитических методов, с помощью которых получают точное решение, численные методы дают приближенное решение.

5. Экспериментальные методы. В некоторых задачах построение модели задачи оптимизации затруднительно, поэтому в них оптимальное решение x^* получают методом оптимального эксперимента – как и в численных методах, переход к лучшему решению проводится итерационно, однако значения самой целевой функции $f(x)$ определяются экспериментально. Это самые дорогостоящие методы.

Для практических приложений наиболее эффективны численные методы оптимизации.

II. По математической формулировке задачи оптимизации.

1. Методы одномерного поиска. Заключаются в нахождении $\min f(x)$, $\dim x = 1$.

2. Методы безусловной минимизации. Заключаются в нахождении $\min f(x)$, $\dim x \geq 2$.

3. Методы условной оптимизации. Необходимо найти $\min_{x \in D} f(x)$, где

$$D = \{x \mid g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, p}; \quad h_j(x) = 0, j = \overline{1, r}\}.$$

Если хотя бы одна из функций задачи оптимизации нелинейная, то методы называются методами нелинейного программирования.

4. Методы выпуклой оптимизации. Формулировка задачи аналогична пункту 3, однако $f(x)$ и D являются выпуклыми. В этом случае решение x^* существует и единственно.

5. Методы линейного программирования. Формулировка задачи аналогична пункту 3, только все функции линейны.

6. Методы минимизация суммы квадратов. Ищется минимум функции

$$S(x) = \sum_{k=1}^m [f_k(x)]^2,$$

представляющей сумму квадратов нелинейных функций $f_k(x)$, $k = \overline{1, m}$. Если $f_k(x)$ – линейные функции, то применяется метод наименьших квадратов, который сводит решение задачи оптимизации к решению системы линейных алгебраических уравнений.

7. Методы дискретного программирования. Задачи оптимизации, решаемые этими методами, характеризуется тем, что переменные параметры x_i , $i = \overline{1, n}$ могут принимать только дискретные значения. Если x_i принимают только целые значения, то соответствующая задача является задачей целочисленного программирования. Она решается соответствующими методами целочисленного программирования. Данный класс методов широко использует дискретную математику и различные комбинаторные схемы.

III. По порядку производных.

Численные методы оптимизации в свою очередь классифицируют по максимальному порядку применяемых в этих методах производных целевой функции.

1. Методы нулевого порядка (методы прямого поиска). В этих методах для оптимизации целевой функции используются только значения самой функции, а значения ее производных не используются. Преимущество методов нулевого порядка заключается в сравнительно простой модификации для решения широкого круга различных задач оптимизации.

2. Методы первого порядка. Эти методы применяются для оптимизации дифференцируемых целевых функций и основаны на использовании первых производных функции. Первые производные задаются градиентом целевой функции, представляющим вектор-столбец ее частных производных по переменным параметрам

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T,$$

где T – знак транспонирования. Поэтому данные методы часто называются градиентными методами. Для градиента также широко используется обозначение $\nabla f(x) = \text{grad } f(x)$.

3. Методы второго порядка. Эти методы применяются для минимизации дважды дифференцируемых целевых функций и основаны на использовании матрицы вторых частных производных целевой функции – матрицы Гессе

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица Гессе или гессиан также обозначается $\nabla^2 f(x) = H(x)$.

4.2. Теоретические основы одномерной оптимизации

Методы одномерного поиска предназначены для вычисления экстремума целевой функции $f(x)$ одной переменной $x \in R$.

Если в некоторой точке x^* функция $f(x)$ принимает значение $f^* = f(x^*)$, наименьшее по сравнению с ее значениями в некоторой окрестности этой точки $C_\varepsilon(x^*) = (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, то точка x^* называется *точкой минимума* функции $f(x)$, а число f^* называют просто *минимумом* функции (рис. 4.1).

Если же для всех $x \in C_\varepsilon(x^*)$ и $x \neq x^*$ будет $f(x) > f(x^*)$, то в точке x^* функция $f(x)$ имеет *максимум* f^* . Минимум и максимум имеют общее название *экстремум*.

При разработке современного программного обеспечения методов оптимизации для определенности полагают, что целевую функцию необходимо минимизировать. Если необходима максимизация целевой функции $g(x)$ ($g(x) \rightarrow \max$), то переходят к вспомогательной функции $f(x) = -g(x)$, минимизация которой приведет к максимизации исходной функции:

$$f(x) \rightarrow \min \Rightarrow g(x) \rightarrow \max.$$

Если $g(x) \neq 0$, то можно также положить $f(x) = 1/g(x)$.

Для исследования функции $f(x)$ на экстремум используют понятие производной этой функции

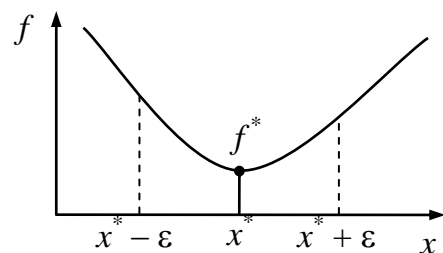


Рис. 4.1. Минимум функции

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4.1)$$

Первая производная на основании определения (4.1) вычисляется по формуле конечной разности

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f_x}{h}, \quad (4.2)$$

где x – точка, в которой вычисляется производная; f_x – значение функции в точке x ; h – малое приращение аргумента. Погрешность этой формулы составляет $o(h)$.

Основанное на определении производной полезное свойство экстремума дается теоремой Ферма.

Теорема Ферма. Если функция $f(x)$ в некоторой внутренней точке x^* интервала X принимает в этом интервале наименьшее или наибольшее значение и дифференцируема в точке x^* , то $f'(x^*) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что касательная к графику функции, проведенная в точке экстремума, параллельна оси абсцисс, что показано на рис. 4.2.

Точки x , в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$, называются *стационарными* или *критическими точками*.

Необходимый признак существования экстремума функции одной переменной $f(x)$ в точке x^* представляется следующей теоремой.

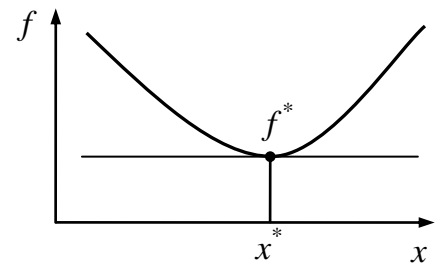


Рис. 4.2. Смысл теоремы Ферма

Теорема 4.1. Если функция $f(x)$ имеет в точке x^* экстремум, то её производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Необходимым и достаточным признаком существования экстремума функции $f(x)$ в точке x^* является изменение знака производной $f'(x)$ при переходе через точку x^* (рис. 4.3). Если при возрастании переменной x производная $f'(x)$ в точке x^* меняет знак с минуса на плюс, то это точка минимума функции (рис. 4.3, а). Если же знак $f'(x)$ в точке x^* меняется с плюса на минус, то это точка максимума (рис. 4.3, б). Поэтому имеет место следующая теорема.

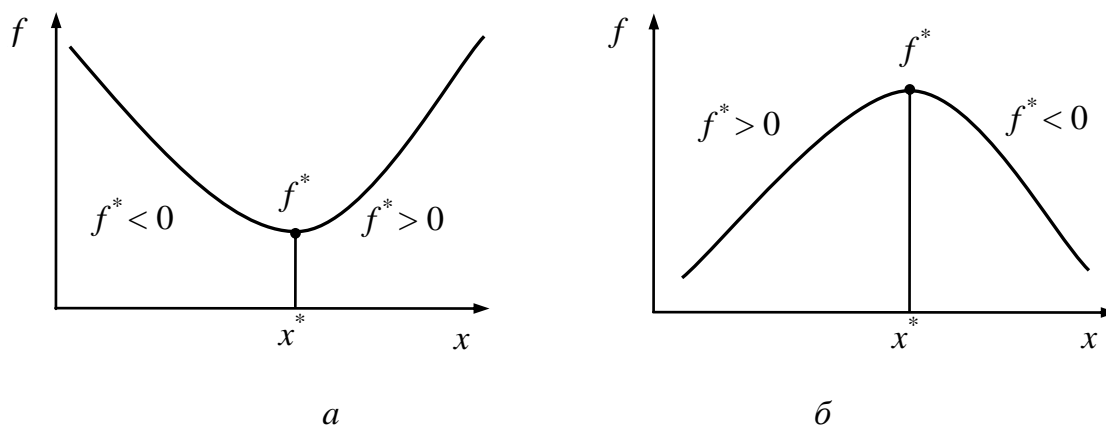


Рис. 4.3. Необходимый и достаточный признак экстремума

Теорема 4.2. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ имела в точке x^* экстремум, необходимо и достаточно, чтобы её производная $f'(x)$ при переходе через эту точку меняла знак.

Исследовать функцию на экстремум можно и с помощью второй производной.

Теорема 4.3. Пусть в точке x^* функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке x^* имеет экстремум: минимум, если $f''(x^*) > 0$, и максимум, если $f''(x^*) < 0$.

Теорема 4.3 является более «узкой», чем предыдущая теорема 4.2, так как в точке экстремума даже $f'(x)$ может не существовать, а тогда тем более не существует $f''(x)$. В подобных случаях можно применять только теорему 4.2, которая применима и в том случае, когда $f'(x^*) = 0$ и $f''(x^*) = 0$. Первая и вторая производные вычисляются по формулам конечных разностей второго порядка:

$$f'_x = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f''_x = \frac{f(x+h) - 2f_x + f(x-h)}{h^2}, \quad (4.3)$$

где x – точка, в которой вычисляется производная; f_x – значение функции в точке x ; h – малое приращение аргумента. Погрешность этих формул составляет $o(h^2)$.

Решение задачи одномерной оптимизации – это значение переменной x^* , которое доставляет минимум целевой функции. Решение задачи безусловной оптимизации определяют равенствами:

$$f(x^*) = \min f(x) \quad \text{или} \quad x^* = \arg \min f(x).$$

Оптимальное значение целевой функции обозначается через $f^* = f(x^*)$.

Метод одномерного поиска – это метод для выполнения итерационного процесса решения задачи одномерной оптимизации, который позволяет исключить полный перебор вариантов и получить решение задачи x^* более рациональным способом. Любой метод одномерного поиска формирует последовательность точек $\{x_k\}$ на множестве K , которая должна сходиться к решению задачи оптимизации: $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^*$. Эффективность

метода одномерного поиска определяется как полученной точностью решения задачи оптимизации, так и величиной затраченных на её решение вычислительных ресурсов.

4.3. Рекомендуемые алгоритмы общих подпрограмм

Для изучения методов одномерного поиска необходимо уметь составлять программы итерационных процессов. Подпрограмме итерационного процесса приближения к точке минимума x^* функции $f(x)$ из начальной точки x_0 соответствует следующий алгоритм.

Алгоритм итерационного метода.

Входные параметры: f – целевая функция, x_0 – начальная точка поиска, x^* – оптимальная точка, α – параметр метода, ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска, F – массив соответствующих значений функции, i – количество точек поиска.

1. Положить $x = x_0$ и вычислить $f_x = f(x)$, $h = x^* - x$.
2. Вывести h, f_x, x .
3. Положить $i = 1$, $P_i = x$, $F_i = f_x$.
4. Вычислить $x = x^* + \alpha \cdot h$, $f_x = f(x)$, $h = x^* - x$.
5. Вывести h, f_x, x .

6. Положить $i = i + 1$, $P_i = x$, $F_i = f_x$.
7. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 4.
8. Остановиться.

В результате этого алгоритма будут получены массивы всех точек поиска и соответствующих значений функции. Для наглядности итерационного процесса представим его на графике целевой функции с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм построение графика.

Входные параметры: f – целевая функция, P и F – массивы всех точек поиска и соответствующих значений функции.

1. Положить $n = 100$, $m = n + 1$, $a = \min P$, $b = \max P$, $N = \dim P$.
2. Вычислить $h = (b - a) / n$.
3. Положить $x = a$, $i = 1$.
3. Вычислить $X_i = x$, $Y_i = f(x)$, $x = x + h$, $i = i + 1$.
4. Если $m > i$, то перейти к шагу 3.
5. Отобразить график функции $\text{plot}(X, Y)$.
6. Отобразить траекторию поиска $\text{plot}(P, F)$.
7. Остановиться.

В этом алгоритме использована графическая функция $\text{plot}(X, Y)$, которая отображает двумерный график функции в виде точек, соединенных отрезками прямой.

4.4. Поиск интервала неопределенности

Функция $f(x)$ называется *строго убывающей* в интервале $X \subseteq R$, если для любых $u, v \in X$, $u < v$ выполняется неравенство $f(u) > f(v)$ (рис. 4.4, а). Для дифференцируемой убывающей функции $f'(x) < 0$.

Функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* в интервале $X \subseteq R$, если для любых $u, v \in X$, $u < v$, выполняется неравенство $f(u) < f(v)$ (рис. 4.4, б). Для дифференцируемой возрастающей функции $f'(x) > 0$.

Функция $f(x)$ называется *унимодальной*, если существует единственная точка ее минимума x^* и слева от x^* эта функция строго убывает, а справа от x^* строго возрастает (рис. 4.5). Это означает, что для любых $u, v \in R$, $u < v < x^*$, выполняется неравенство $f(u) > f(v)$, а для любых

$u, v \in R$, таких что $x^* < u < v$, выполняется неравенство $f(u) < f(v)$. Для дифференцируемой унимодальной функции $f'(x) < 0$ для любого $x < x^*$ и $f'(x) > 0$ при любом $x > x^*$ (рис. 4.3, а).

Унимодальная функция не обязательно непрерывна (рис. 4.5, б).

Функция $f(x)$ называется *выпуклой* в интервале $X \subseteq R$, если для всех $u, v \in X$ и $\lambda \in [0; 1]$ и выполняется неравенство

$$f(\lambda u + (1 - \lambda) v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda) f(v). \quad (4.4)$$

Если это неравенство является строгим для всех $u, v \in R$, $u \neq v$ и $\lambda \in (0; 1)$, то функция $f(x)$ называется *строго выпуклой*. Функция $f(x)$ называется (строго) *вогнутой*, если $-f(x)$ (строго) выпукла.

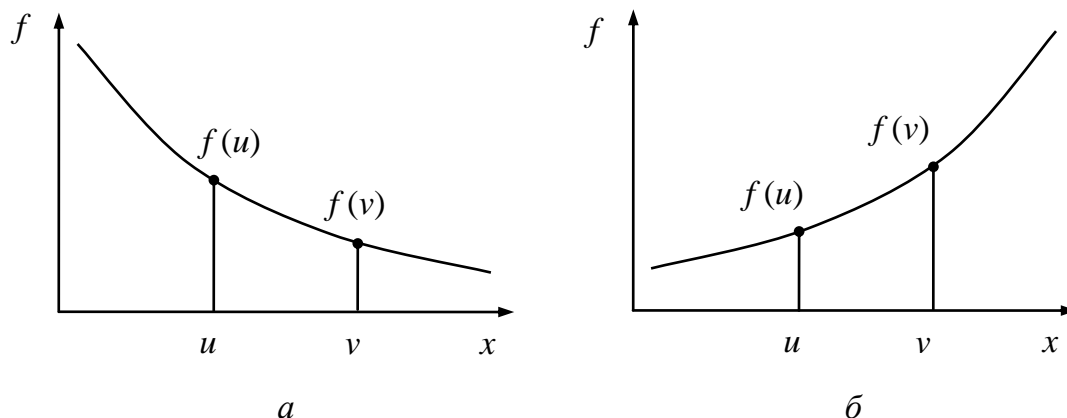


Рис. 4.4. Убывающая и возрастающая функции

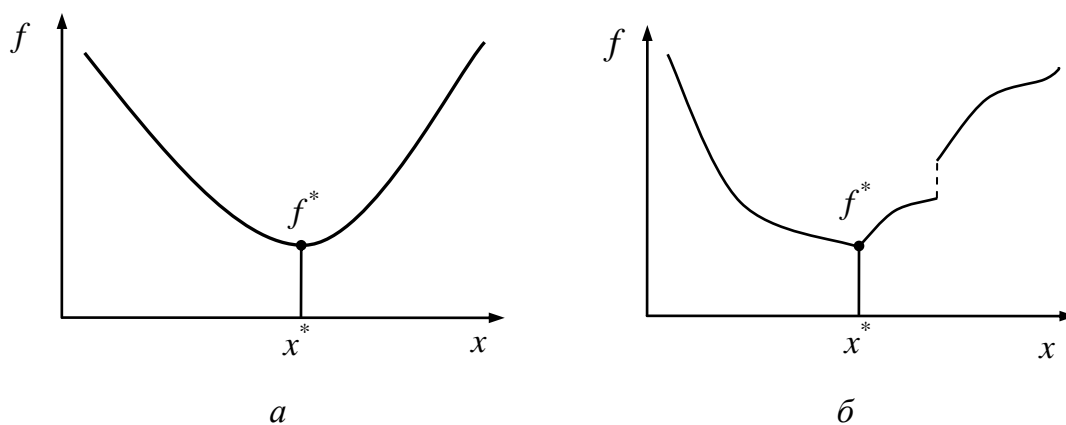


Рис. 4.5. Унимодальные функции

Возьмем $u, v, \lambda \in (0; 1)$, и определим $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$, $y = f(w)$, $z = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$. Точка (w, y) лежит на графике функции, а точка (w, z) – на графике секущей (рис. 4.6, а). Неравенство (4.4) примет вид $y \leq z$. Выпуклость функции $f(x)$ геометрически означает, что любая точка произвольной хорды графика $f(x)$ располагается не ниже соответствующей точки самого графика и любая касательная к графику $f(x)$ расположена не выше графика самой функции. Если $f(x)$ дважды дифференцируемая и строго выпуклая, то $f''(x^*) > 0$. Для дифференцируемой строго вогнутой функции $f''(x^*) < 0$ (рис. 4.6, б).

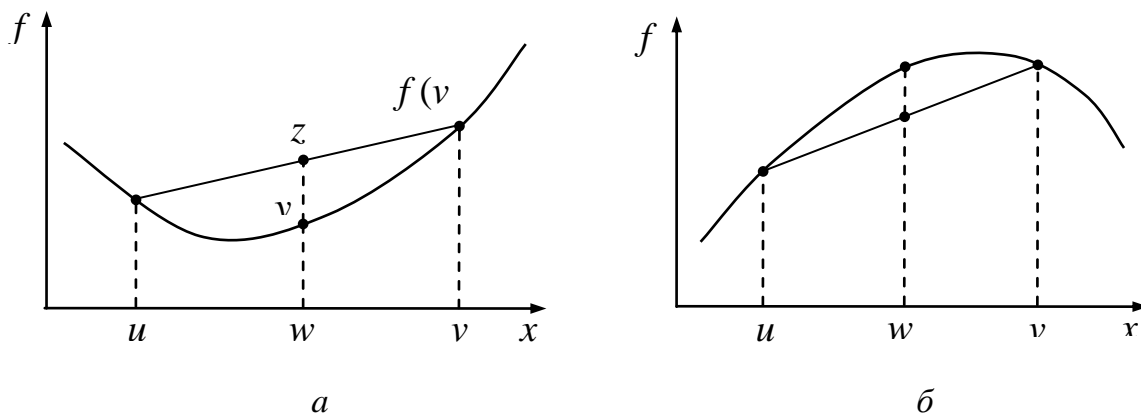


Рис. 4.6. Выпуклая и вогнутая функции

Если строго выпуклая функция имеет минимум, то этот минимум единственный. Такая функция является унимодальной. Однако определению унимодальной функции могут удовлетворять и функции, не являющиеся непрерывными и выпуклыми.

Если функция обладает свойством унимодальности, то локальный минимум является и глобальным минимумом. Если же функция не является унимодальной, то возможно наличие нескольких локальных минимумов.

Интервал $[a, b] \subset R$, содержащий неизвестную точку минимума x^* функции $f(x)$, называется *интервалом неопределенности*. Если известно, что $x^* \in [a, b]$, но само значение x^* не известно заранее, то $[a, b]$ – интервал неопределенности.

Одномерный поиск минимума целевой функции обычно состоит из двух основных этапов: поиска интервала неопределенности и его уменьшения.

При поиске интервала неопределенности из некоторой начальной точки последовательно осуществляются шаги до тех пор, пока значения функции в пробных точках не перестанут уменьшаться. Если найдены такие три различные точки функции $f(x)$, что значение функции во внутренней точке не превосходит ее значений в крайних точках, то крайние точки являются границами интервала неопределенности. Пусть, например, при $a < c < b$ выполняются неравенства $f(a) > f(c)$, $f(c) \leq f(b)$. Тогда $[a, b]$ – интервал неопределенности, что показано на рис. 4.7. Методы уменьшения интервала неопределенности основаны на следующей теореме.

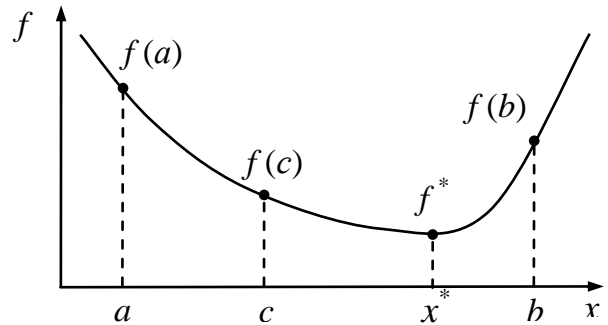


Рис. 4.7. Интервал неопределенности

Теорема 4.4. Пусть $[a, b]$ – интервал неопределенности унимодальной функции $f(x)$, минимум которой f^* достигается в точке x^* . Пусть u, v – такие внутренние точки интервала неопределенности, что $a < u < v < b$, $f_u = f(u)$ и $f_v = f(v)$ – значения функции в этих точках. Тогда, если $f_u < f_v$, то $x^* \in [a, v]$, если же $f_u \geq f_v$, то $x^* \in [u, b]$.

Эту теорему называют *правилом исключения интервалов*. Действительно, из нее следует, что если выполняется неравенство $f_u < f_v$, то полуоткрытый интервал $(v, b]$ заведомо не содержит точку минимума x^* и его следует исключить, приняв в качестве нового интервала неопределенности интервал $[a, v]$ меньшей длины, чем исходный интервал $[a, b]$ (рис. 4.8, а). Если же выполняется противоположное неравенство $f_u \geq f_v$, то заведомо не содержит точку минимума x^* полуоткрытый интервал $[a, u)$, и его следует исключить, приняв в качестве нового интервала неопределенности меньший интервал $[u, b]$ (рис. 4.8, б).

По правилу исключения интервалов строят процедуру поиска точки минимума целевой функции путем вычисления её значений во внутренних точках текущего интервала неопределенности и последующего исключения частей этого интервала путем сравнения значений функции

во внутренних точках. Поиск завершается, когда интервал неопределенности уменьшится до заданной длины. На этом принципе основывается большинство методов одномерного поиска.

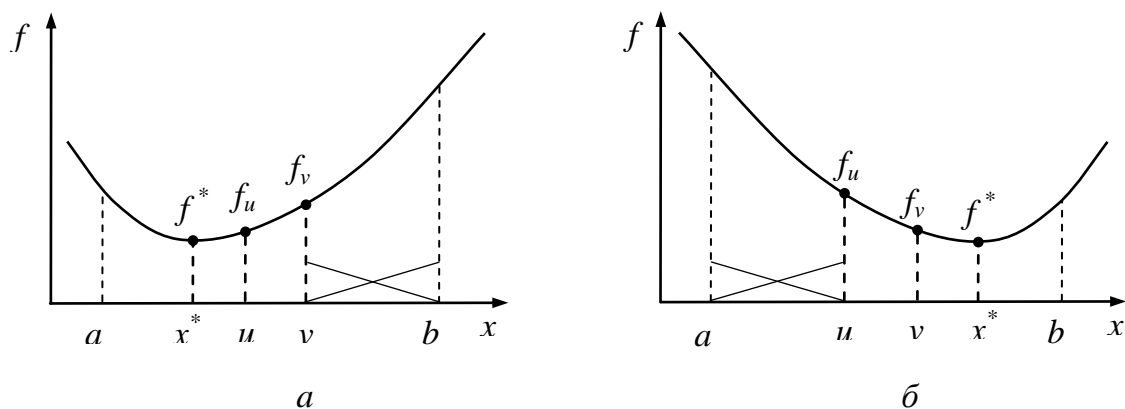


Рис. 4.8. Правило исключения интервалов

Свенн предложил метод удвоения шага для поиска интервала неопределенности $[a, b]$ унимодальной функции $f(x)$, в котором задается начальная точка x_0 и начальный шаг $h > 0$. В точке x_0 вычисляется значение функции $f_0 = f(x_0)$ и выполняется переход к следующей точке $x_1 = x_0 + h$ с вычислением значения функции $f_1 = f(x_1)$. Если $f_1 < f_0$, то выполняются итерации в положительном направлении относительно точки x_0 по рекуррентной формуле удвоения шага

$$x_{k+1} = x_k + 2^k h, \quad k = \overline{1, m} \quad (4.5)$$

с вычислением значений функции $f_k = f(x_k)$ до тех пор, пока не будет получена точка с не меньшим значением функции, чем значение функции в предыдущей точке: $f_{m-1} > f_m$, $f_{m-1} \leq f_{m+1}$. Соответствующий процесс вычислений для значения $m = 2$ представлен на рис. 4.9. В этом случае будут определены концы интервала неопределенности

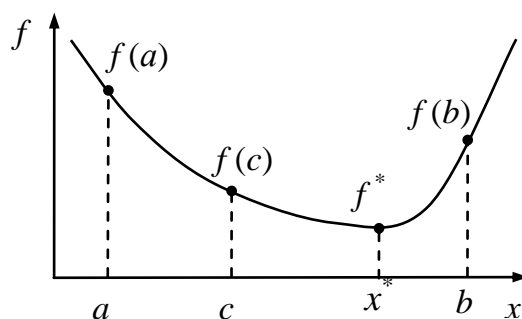


Рис. 4.9. Поиск в положительном направлении

ности $a = x_{m-1}$, $b = x_{m+1}$ со значениями функции $f_a = f_{m-1}$, $f_b = f_{m+1}$ и внутренняя точка интервала $c = x_m$ со значением функции $f_c = f_m$. Таким образом, аналогично рис. 4.6 имеем интервал неопределенности $[a, b]$.

Если после начального шага $f_1 \geq f_0$, то направление поиска меняется на противоположное и определяются $x_2 = x_0 - h$, $f_2 = f(x_2)$. Если $f_2 \geq f_0$, то интервал неопределенности найден и $a = x_2$, $b = x_1$, $f_a = f_2$, $f_b = f_1$, $c = x_0$, $f_c = f_0$ (рис. 4.10).

Если же $f_2 < f_0$, то итерации выполняются в отрицательном направлении по формуле удвоения шага

$$x_{k+1} = x_k - 2^{k-1}h, \quad k = \overline{2, n} \quad (4.6)$$

с вычислением значений функции $f_k = f(x_k)$ до тех пор, пока значения функции не перестанут уменьшаться: $f_{n-1} > f_n$, а $f_n \leq f_{n+1}$, что представлено на рис. 4.11. Таким образом, будет определен интервал неопределенности со значениями концов $a = x_{n+1}$, $b = x_{n-1}$, $f_a = f_{n+1}$, $f_b = f_{n-1}$, и внутренняя точка интервала $c = x_n$ со значением функции $f_c = f_n$.

Итак, методом Свенна определяются границы интервала неопределенности. В любом случае интервал неопределенности $[a, b]$ определяется тремя последними точками поиска метода Свенна x_{n-1} , x_n , x_{n+1} . При этом становятся известными значения функции на концах интервала неопределенности $f_a = f(a)$ и $f_b = f(b)$, а также внутренняя точка интервала c и значение функции в ней $f_c = f(c)$ (рис. 4.6).

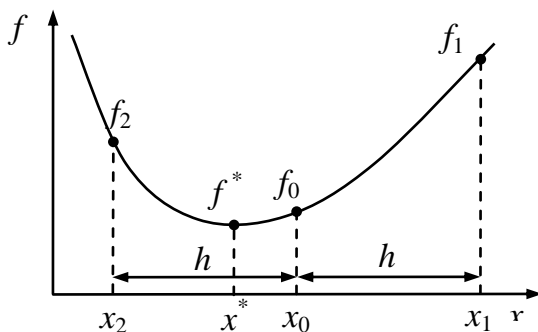


Рис. 4.10. Изменение направления поиска

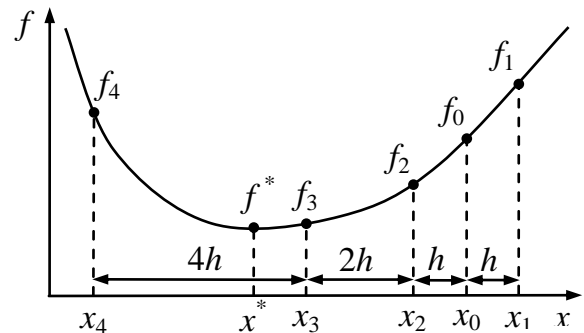


Рис. 4.11. Поиск в отрицательном направлении

4.5. Рекомендуемый алгоритм поиска интервала неопределенности

В методе Свенна используются только значения целевой функции, поэтому это метод нулевого порядка. Метод Свенна с использованием формул (2.2) и (2.3) можно реализовать по следующему алгоритму, который рекомендуется строить по алгоритму итерационного процесса приближения к точке минимума.

Алгоритм метода Свенна.

Входные параметры: f – целевая функция, c – начальная точка поиска; h – начальный шаг.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – границы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; c и f_c – внутренняя точка интервала и значение в ней функции.

1. Вычислить $f_c = f(c)$, $b = c + h$, $f_b = f(b)$.
2. Положить $i = 1$, $P_i = c$, $F_i = f_c$, $i = i + 1$, $P_i = b$, $F_i = f_b$.
3. Если $f_b \geq f_c$, то перейти к шагу 8.
4. Положить $a = c$, $f_a \geq f_c$, $c = b$, $f_c = f_b$, $h = 2h$.
5. Вычислить $b = c + h$, $f_b = f(b)$.
6. Положить $i = i + 1$, $P_i = b$, $F_i = f_b$.
7. Если $f_b < f_c$, то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 15.
8. Вычислить $a = c - h$, $f_a = f(a)$.
9. Положить $i = i + 1$, $P_i = a$, $F_i = f_a$.
10. Если $f_a \geq f_c$, то перейти к шагу 15.
11. Положить $b = c$, $f_b = f_c$, $c = a$, $f_c = f_a$, $h = 2h$.
12. Вычислить $a = c - h$, $f_a = f(a)$.
13. Положить $i = i + 1$, $P_i = a$, $F_i = f_a$.
14. Если $f_a < f_c$, то перейти к шагу 11.
15. Если $a > b$, то положить $d = a$, $f_d = f_a$, $a = b$, $f_a = f_b$, $b = d$, $f_b = f_d$.
16. Остановиться.

На шагах 1–8 выполняется поиск интервала в положительном направлении, а на шагах 9–14 – в отрицательном направлении.

4.6. Методы уменьшения интервала неопределенности

Данный раздел в основном посвящен методам уменьшения интервала неопределенности точки минимума унимодальной функции. Обосновываются методы равномерного поиска, дихотомии, деления интервала пополам. Рассматриваются свойства чисел Фибоначчи, на основании которых конструируется метод Фибоначчи. Изучаются свойства золотого сечения, по которым обосновывается метод золотого сечения. Для рассмотренных методов дана оценка их эффективности. Представляется метод адаптации шага, который не требует нахождения интервала неопределенности. Выполняется сравнение методов уменьшения интервала неопределенности по коэффициенту уменьшения длины интервала при заданном количестве вычислений функции. Приводятся алгоритмы для всех рассмотренных методов.

Для уменьшения интервала неопределенности функции одной переменной существуют *пассивные* и *последовательные* стратегии поиска. При пассивной стратегии все точки, в которых вычисляются значения функции, определены заранее. В последовательных методах точки поиска выбирают с учетом результатов предыдущих вычислений.

Метод равномерного поиска соответствует пассивной стратегии с равномерным заполнением n точками интервала неопределенности $[a, b]$, которые делят этот интервал на $n + 1$ часть одинаковой длины. Для этого находится длина интервала неопределенности $L = b - a$, определяется расстояние между точками $\delta = L / (n + 1)$, вычисляются координаты точек $x_k = a + k\delta$ для $k = \overline{1, n}$ и соответствующие им значения функции $f_k = f(x_k)$ (рис. 4.12).

Далее определяется точка x_i с наименьшим значением функции $f_i = \min_k f_k$. В результате выполнения равномерного поиска будет получен конечный интервал неопределенности $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ длины $L_n = 2\delta$ (рис. 4.12). Эффективность метода равномерного поиска можно оценить с помощью отношения длин конечного и начального интервалов неопределенности:

$$r_n = \frac{L_n}{L} = \frac{2\delta}{L} = \frac{2L}{L(n+1)}, \quad r_n = \frac{2}{n+1}, \quad . \quad (4.7)$$

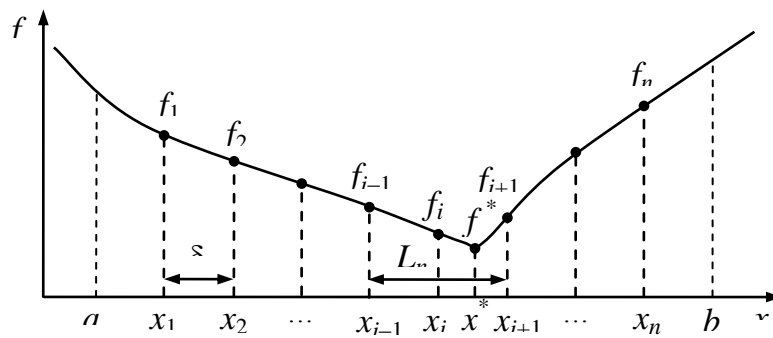


Рис. 4.12. Метод равномерного поиска

Метод дихотомии является последовательным и основан на делении интервала неопределенности $[a, b]$ длины $L = b - a$ двумя внутренними точками u и v , которые целесообразно располагать симметрично относительно центра $c = (a + b)/2$ исходного интервала $[a, b]$.

Пусть δ – расстояние точек u и v от центра интервала c . Тогда эти точки $u = c - \delta$, $v = c + \delta$, длина нового интервала $L_2 = L/2 + \delta$ (рис. 4.13). При этом δ берут достаточно малым, так что можно полагать $L_2 = L/2$, то есть интервал неопределенности уменьшается в два раза. В зависимости от результата сравнения f_u и f_v в качестве следующего интервала неопределенности берут $[a, v]$ или $[u, b]$, и к новому интервалу применяют аналогичные действия. Итерации продолжаются до тех пор, пока интервал неопределенности не уменьшится до заданного значения ε . В результате n вычислений функции получим интервал длины L_n , по которому определим эффективность метода r_n :

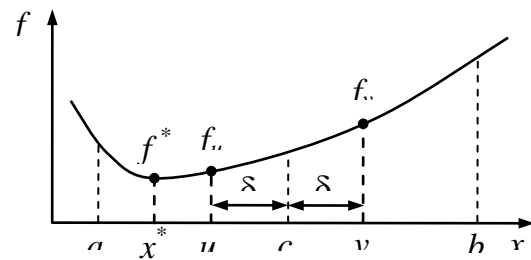


Рис. 4.13. Метод дихотомии

$$L_n = \frac{L}{2^{n/2}}, \quad r_n = \frac{L_n}{L}, \quad r_n = \frac{1}{2^{n/2}}. \quad (4.8)$$

Метод деления интервала пополам. На первой итерации разделим интервал неопределенности $[a, b]$ длины $L = b - a$ пополам точкой $c = (a + b)/2$ и вычислим в ней значение целевой функции $f_c = f(c)$. В результате получим два меньших интервала: $[a, c]$ и $[c, b]$ (рис. 4.14).

Разделим интервал $[a, c]$ пополам точкой $z = (a + c)/2$ и вычислим в ней значение функции $f_u = f(z)$. Если $f_u < f_c$, то исключим интервал $(c, b]$ и получим интервал неопределенности $[a, c]$ с известной средней точкой (u, f_u) . Если же $f_u \geq f_c$, то разделим интервал $[c, b]$ пополам точкой $v = (c + b)/2$ и вычислим в ней значение целевой функции $f_v = f(v)$.

Если $f_u \geq f_c$, то разделим правый интервал $[c, b]$ пополам точкой $v = (c + b)/2$ и вычислим в ней значение целевой функции $f_v = f(v)$.

Если $f_u < f_c$, то по правилу исключения интервалов исключим левый интервал $[a, c)$ и получим новый интервал неопределенности $[c, b]$ с известной средней точкой (v, f_v) (рис. 4.15).

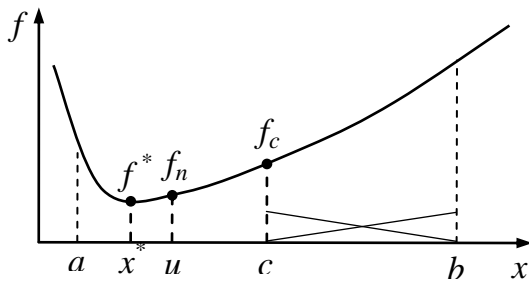


Рис. 4.14. Исклечение правого интервала

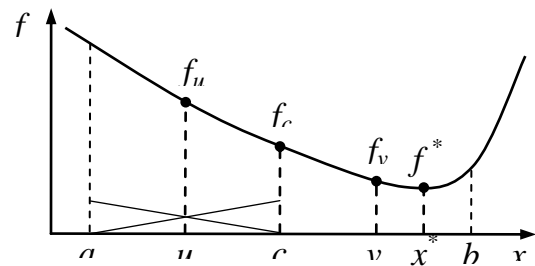


Рис. 4.15. Исклечение левого интервала

Если же $f_v \geq f_c$, то исключаются крайние интервалы $[a, u]$ и $(v, b]$, а интервал $[u, v]$ становится новым интервалом неопределенности с известной средней точкой (c, f_c) (рис. 4.16).

После двух или трех вычислений целевой функции будет найден новый интервал неопределенности, вдвое меньший исходного интервала, с известной средней точкой.

В последующих итерациях, которые выполняются аналогично первой, но без вычисления средней точки, интервал неопределенности будет делиться пополам уже после одного или двух вычислений целевой функции. Итерации продолжаются до тех пор, пока длина интервала неопределенности не станет меньше заданного значения ε .

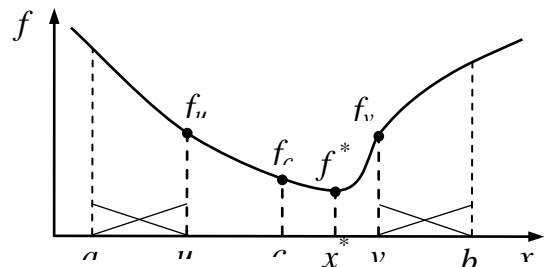


Рис. 4.16. Исклечение крайних интервалов

В результате n вычислений функции получим конечный интервал неопределенности длины L_n и соответствующую ему эффективность метода r_n :

$$\frac{L}{2^{n-1}} \leq L_n \leq \frac{L}{2^{(n-1)/2}}, \quad \frac{1}{2^{n-1}} \leq r_n \leq \frac{1}{2^{(n-1)/2}}. \quad (4.9)$$

Метод Фибоначчи основан на числах Фибоначчи:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n+1}, n = 2, 3, 4, \dots \dots \quad (4.10)$$

Этим числам, начиная с F_2 , отвечает закономерность: *каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих*.

В методе Фибоначчи задаются допустимое количество вычислений функции n и расстояние δ между двумя внутренними точками последней итерации. Для начала поиска необходимо найти положение первой точки деления исходного интервала, которая должна лежать на расстоянии L_2 от конца интервала

$$L_2 = \frac{1}{F_n} [(b-a)F_{n-1} + (-1)^n \delta]. \quad (4.11)$$

По свойству симметрии для двух первых точек деления исходного интервала неопределенности $[a, b]$ можно положить:

$$x_1 = b - L_2, \quad x_2 = a + L_2.$$

Вычислим в этих точках значения функции и применим правило исключения интервалов.

Если на некоторой итерации известна внутренняя точка x_k интервала $[a_k, b_k]$, то симметричная ей точка находится по формуле

$$x_{k+1} = a + b - x_k. \quad (4.12)$$

Путем сравнения x_k и x_{k+1} , $f_k = f(x_k)$ и $f_{k+1} = f(x_{k+1})$ по правилу исключения интервалов уменьшается интервал неопределенности. Таким образом, сохраняя принцип симметрии внутренних точек, на каждой последующей итерации будем вычислять одно значение функции.

При пренебрежимо малом значении δ в результате n вычислений функции получим интервал длины L_n и соответствующую ему эффективность метода r_n :

$$L_n = \frac{L}{F_n}, \quad r_n = \frac{1}{F_n}. \quad (4.13)$$

Метод золотого сечения использует принципы золотого сечения и симметрии для двух внутренних точек деления интервала неопределенности $[a, b]$. Золотым сечением называется деление отрезка на две части так, что отношение длин отрезка и его большей части равно отношению длин большей и меньшей частей. Это отношение обозначают через τ и вводят параметр t :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad t = \frac{1}{\tau} = \tau - 1, \\ t &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887498949... \end{aligned} \quad (4.14)$$

Две первые точки определяются по золотому сечению:

$$x_1 = b - tL, \quad x_2 = a + tL,$$

где $x_1 < x_2$. В этих точках вычисляются значения функции $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$ и применяется правило исключения интервалов, после чего интервал неопределенности уменьшается в τ раз и имеет длину $L_2 = tL$. Оставшаяся внутренняя точка делит новый интервал неопределенности также по золотому сечению. Следующая точка поиска определяется симметрично оставшейся точке по формуле (4.12).

На каждой итерации метода золотого сечения вычисляется значение функции только в одной внутренней точке, а вторая точка со своим значением функции переходит из предыдущей итерации. После этого применяется правило исключения интервалов, и интервал неопределенности уменьшается в τ раз. Итерации продолжаются до тех пор, пока длина интервала неопределенности не станет меньше допустимой погрешности ε , то есть пока не выполнится условие $L_n < \varepsilon$.

В результате n вычислений функции получим интервал длины L_n и соответствующую ему эффективность метода r_n :

$$L_n = t^{n-1}L = \frac{L}{\tau^{n-1}}, \quad r_n = \frac{1}{\tau^{n-1}}. \quad (4.15)$$

Метод адаптации шага разработан харьковским математиком В. Ф. Коропом. Метод заключается в умножении текущего шага поиска на некоторый коэффициент, который вычисляется на основании информации предшествующего поиска.

Для начала работы метода адаптации шага задаются начальная точка x_0 , начальный шаг $h_0 > 0$ и начальное значение множителя шага $r_0 = 0$. В точке x_0 вычисляется значение целевой функции $f_0 = f(x_0)$. Итерация с номером $k + 1$ метода адаптации шага выполняются по результатам итерации с номером $k = 0, 1, 2, \dots$. Вначале итерации вычисляется следующая пробная точка поиска:

$$y_{k+1} = x_k + h_k, \quad g_{k+1} = f(y_{k+1}). \quad (4.16)$$

Затем определяется лучшая точка поиска путем сравнения нового значения функции g_{k+1} с лучшим значением предыдущих итераций f_k :

$$x_{k+1} = \begin{cases} y_{k+1}, & g_{k+1} < f_k; \\ x_k, & g_{k+1} \geq f_k; \end{cases} \quad f_{k+1} = \begin{cases} g_{k+1}, & g_{k+1} < f_k; \\ f_k, & g_{k+1} \geq f_k. \end{cases} \quad (4.17)$$

На основании сравнения g_{k+1} с f_k и предыдущего значения множителя шага r_k вычисляется новое значение множителя шага

$$r_{k+1} = \begin{cases} 2, & g_{k+1} < f_k \wedge r_k \geq 0,5; \\ 0,5, & g_{k+1} < f_k \wedge r_k < 0,5; \\ 0,25, & g_{k+1} \geq f_k \wedge r_k = 2; \\ -0,5, & g_{k+1} \geq f_k \wedge r_k \neq 2. \end{cases} \quad (4.18)$$

Умножением на это значение величины предыдущего шага находится значение следующего шага

$$h_{k+1} = r_{k+1} h_k. \quad (4.19)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие $|h_{k+1}| < \varepsilon$, где ε – допустимая погрешность.

4.7. Рекомендуемые алгоритмы методов уменьшения интервала неопределенности

Метод равномерного поиска можно реализовать по следующему алгоритму.

Алгоритм метода равномерного поиска.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – границы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; x и f_x – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $L = b - a$, $n = \text{round}(L/\varepsilon)$, $\delta = L / (n + 1)$.
2. Вычислить $x = a + \delta$, $f_x = f(x)$.
3. Положить $i = i + 1$, $P_i = x$, $F_i = f_x$.
4. Положить $k = 2$, $v = x$.
5. Положить $v = v + \delta$ и вычислить $f_v = f(v)$.
6. Положить $i = i + 1$, $P_i = x$, $F_i = f_x$.
7. Если $f_v < f_x$, то положить $x = v$, $f_x = f_v$.
8. Если $k < n$, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 5.
9. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 1 вычисляется число внутренних точек интервала неопределенности n с помощью функции округления вещественного числа до ближайшего целого функцией $n = \text{round}(L/\varepsilon)$. Метод равномерного поиска позволяет вычислить минимум даже многоэкстремальной целевой функции в заданном интервале с гарантированной точностью. Однако для унимодальных функций существуют намного более эффективные последовательные методы поиска.

Алгоритм метода дихотомии.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; u и f_u – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $\delta = \varepsilon/8$.
2. Вычислить $c = (a + b)/2$.
3. Вычислить $u = c - \delta$, $f_u = f(u)$, $v = c + \delta$, $f_v = f(v)$, $L = v - a$.
4. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$, $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
5. Если $f_u < f_v$, то положить $b = v$, иначе положить $a = u$.
6. Если $L < \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
7. Остановиться.

Надежность метода дихотомии зависит от параметра δ .

Алгоритм метода деления интервала пополам.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a , b – концы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; c и f_c – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $c = (a + b)/2$, $f_c = f(c)$.
2. Положить $i = i + 1$, $P_i = c$, $F_i = f_c$.
3. Вычислить $u = (a + c)/2$, $f_u = f(u)$, $L = c - a$.
4. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$.
5. Если $f_u < f_c$, то положить $b = c$, $c = u$, $f_c = f_u$ и перейти к шагу 9.
6. Вычислить $v = (c + b)/2$, $f_v = f(v)$, $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
7. Если $f_v < f_c$, то положить $a = u$, $c = v$, $f_c = f_v$ и перейти к шагу 9.
8. Положить $a = u$, $b = v$.
9. Если $L > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.
10. Остановиться.

В этом алгоритме на шагах 1 и 3 вычисляются средние точки интервала и левой половины интервала, а на шаге 6 – средняя точка правой половины интервала. Точки сравниваются на шагах 5 и 7.

Формулы (3.5) и (3.6) вместе с правилом исключения интервалов являются основой алгоритма метода Фибоначчи.

Алгоритм метода Фибоначчи.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; u и f_u – конечная точка и значение функции в ней.

1. Положить $\delta = \varepsilon/8$, $L = b - a$, $\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = 1$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, $s = 1$.
2. Положить $\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = 1$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, $s = -s$.
3. Если $L > \varepsilon \cdot \Phi$, то перейти к шагу 2.
4. Вычислить $L = (L \cdot \Phi_1 + \delta \cdot s) / \Phi$, $u = b - L$, $f_u = f(u)$.
5. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$.
6. Вычислить $v = a + L$, $f_v = f(v)$.
7. Положить $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
8. Вычислить $L = v - u$.
9. Если $f_u \geq f_v$, то перейти к шагу 13.
10. Положить $b = v$, $v = u$, $f_v = f_u$.
11. Вычислить $u = a + L$, $f_u = f(u)$.
12. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$ и перейти к шагу 16.
13. Положить $a = u$, $u = v$, $f_u = f_v$.
14. Вычислить $v = b - L$, $f_v = f(v)$.
15. Положить $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
16. Если $L > \varepsilon$, то перейти к шагу 8.
17. Остановиться.

Алгоритм метода золотого сечения.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; x и f_x – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $t = 0,5 \cdot (\sqrt{5} - 1)$, $L = t \cdot (b - a)$, $u = b - L$, $f_u = f(u)$,
 $v = a + L$, $f_v = f(v)$.

2. Положить $i = i + 1, P_i = u, F_i = f_u, i = i + 1, P_i = v, F_i = f_v$.
3. Если $f_u \geq f_v$, то перейти к шагу 7.
4. Положить $b = v, v = u, f_v = f_u$.
5. Вычислить $L = u - a, u = b - L, f_u = f(u)$.
6. Положить $i = i + 1, P_i = u, F_i = f_u$ и перейти к шагу 10.
7. Положить $a = u, u = v, f_u = f_v$.
8. Вычислить $L = b - v, v = a + L, f_v = f(v)$.
9. Положить $i = i + 1, P_i = v, F_i = f_v$.
10. Если $L > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.
11. Остановиться.

Очевидно, что алгоритм метода золотого сечения проще алгоритма метода Фибоначчи. Параметр t метода золотого сечения следует задавать как можно точнее по формуле (3.8), иначе в результате погрешностей вычислений интервал, содержащий минимум, может быть утерян. Признаком подобной ситуации в приведенном алгоритме является выполнение неравенства $u \geq v$. При этом рекомендуется перейти к шагу 1 алгоритма.

Алгоритм метода адаптации шага.

Входные параметры: f – целевая функция; x – начальная точка поиска; h – начальный шаг; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; x и f_x – конечная точка и значение функции в ней.

1. Положить $r = 0$ и вычислить $f_x = f(x)$.
2. Положить $i = 1, P_i = x, F_i = f_x$.
3. Вычислить $y = x + h, f_y = f(y)$.
4. Положить $i = i + 1, P_i = y, F_i = f_y$.
5. Если $f_y \geq f_x$, то перейти к шагу 9.
6. Положить $x = y, f_x = f_y$.
7. Если $r \geq 0,5$, то положить $r = 2$, иначе положить $r = 0,5$.
8. Перейти к шагу 10.
9. Если $r = 2$, то положить $r = 0,25$, иначе положить $r = -0,5$.
10. Положить $h = h \cdot r$.
11. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.
12. Остановиться.

Сравнивая алгоритм метода адаптации шага с алгоритмами методов Свенна и деления интервала пополам, которые совместно решают ту же задачу минимизации целевой функции одной переменной, что и данный метод, можно сделать вывод, что алгоритм метода адаптации шага проще объединения двух указанных алгоритмов. К тому же в методе адаптации шага применяются только простые операции сложения, удвоения шага, деления шага на два и на четыре. Поэтому данный метод является надежным и эффективным на практике.

4.8. Методы аппроксимации и интерполяции

В этой лабораторной работе изучаются методы, основанные на аппроксимации унимодальной целевой функции $f(x)$ полиномом с последующей интерполяцией точки минимума целевой функции в точке минимума полиномиальной функции: методы квадратичной интерполяции с тремя и двумя точками, метод секущих, метод Ньютона, методы кубической интерполяции с четырьмя и двумя точками. Некоторые из этих методов используют производные целевой функции и эффективны только для выпуклых целевых функций. С целью модификации таких методов для минимизации невыпуклых функций сначала рассмотрим простейший метод уменьшения интервала неопределенности с использованием производных.

Метод бисекции делит интервал неопределенности $[a, b]$ пополам с помощью вычисления производной целевой функции в средней точке интервала и часто используется для повышения надежности методов аппроксимации и интерполяции первого порядка. В этом методе вычисляются средняя точка интервала, а также значения функции и её производной в средней точке: $c = (a + b)/2$, $f_c = f(c)$, $f'_c = f'(c)$. Если $f'_c = 0$, то найдена точка минимума c , и вычисления прекращаются. Если $f'_c < 0$, то исключим интервал $[a, c)$, не содержащий точку минимума, полагая $a = c$. Если же $f'_c > 0$, то исключим интервал $(c, b]$, полагая $b = c$. Вычисления продолжаются, пока длина интервала неопределенности $L = b - a$ превосходит допустимую погрешность ε : $L > \varepsilon$. Поскольку при численном вычислении производной используется одно дополнительное вычисление значения функции, то эффективность уменьшения интервала неопреде-

ленности определяется формулой $r_n = 1/2^{n/2}$, что соответствует эффективности метода дихотомии.

Методы квадратичной интерполяции основаны на аппроксимации целевой функции квадратичным полиномом

$$q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad (4.20)$$

где коэффициенты α , β и γ определяются по значениям целевой функции и её производных. Дифференцируя равенство (4.20), имеем

$$q'(x) = 2\alpha x + \beta. \quad (4.21)$$

По необходимому условию существования экстремума $q'(x) = 0$ получим точку минимума параболы

$$\bar{x} = -\frac{\beta}{2\alpha}. \quad (4.22)$$

Для вычисления этой точки достаточно определить лишь параметры α и β уравнения (4.20).

Метод квадратичной интерполяции с тремя точками основан на аппроксимации функции $f(x)$ по трем её точкам квадратичным полиномом (4.1) и на интерполяции искомой точки минимума функции x^* точкой минимума этого полинома по формуле (4.22) и значениям функции.

Первые три точки графика функции (a, f_a) , (b, f_b) , (u, f_u) получим по алгоритму метода Свенна, где $[a, b]$ – интервал неопределенности, $a < u < b$, $f_a = f(a)$, $f_b = f(b)$, $f_u = f(u)$. Подставляя в уравнение параболы (4.1) координаты трех известных точек функции составим систему уравнений:

$$\begin{cases} q(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma = f_a, \\ q(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma = f_u, \\ q(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma = f_b. \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера и подставляя найденные значения коэффициентов α и β в формулу (4.22), получим точку минимума аппроксимирующей параболы

$$v = \frac{P(a+u) + Q(b+u)}{2(P+Q)}, \quad (4.23)$$

где
$$P = (u - a)(f_b - f_u), \quad Q = (b - u)(f_a - f_u), \quad (4.24)$$

Первоначальный интервал неопределенности $[a, b]$ делится двумя точками u и v на три части. По правилу исключения интервалов на основании сравнения значений целевой функции во внутренних точках интервала неопределенности $f_u = f(u)$ и $f_v = f(v)$ та часть, которая заведомо не содержит минимум, отбрасывается, и интервал $[a, b]$ уменьшается. Для оставшегося интервала с одной известной внутренней точкой опять применяется квадратичная интерполяция по формулам (4.23), (4.24). Итерации продолжаются до тех пор, пока расстояние между внутренними точками u и v больше заданной погрешности ε .

Метод квадратичной интерполяции с двумя точками основан на аппроксимации функции $f(x)$ по двум ее точкам квадратичным полиномом (4.20) и на интерполяции искомой точки минимума функции x^* точкой минимума этого полинома по формуле (4.22) и значениям функции и её первой производной.

Первые две точки графика функции (a, f_a) и (b, f_b) на концах интервала неопределенности $[a, b]$ найдем по алгоритму метода Свенна. Вычислим значение производной функции на одном из концов интервала $f'_a = f'(a)$ или $f'_b = f'(b)$. Подставляя в уравнения параболы и ее производной (4.20) и (4.21) координаты двух известных точек функции и одно значение производной, составим системы уравнений:

$$\begin{cases} q(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma = f_a, \\ q(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma = f_b, \\ q(a) = \alpha a^2 + \beta = f'_a. \end{cases} \quad \begin{cases} q(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma = f_a, \\ q(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma = f_b, \\ q(b) = 2\alpha b + \beta = f'_b. \end{cases}$$

Решая эти системы и подставляя найденные значения коэффициентов α и β в равенство (4.22), получим формулы для вычисления точки минимума аппроксимирующей параболы

$$u = a + \frac{1}{2} \frac{f'_a L^2}{f'_a L - f_b + f_a}, \quad u = b - \frac{1}{2} \frac{f'_b L^2}{f'_b L - f_b + f_a}, \quad (4.25)$$

где $L = b - a$ — длина интервала неопределенности.

В зависимости от известного значения производной используется одна из формул (4.25). Затем вычислим $f_u = f(u)$ и $f'_u = f'(u)$. Если $f'_u = 0$, то найдена точка минимума u и вычисления прекращаются. Если $f'_u < 0$,

то исключим интервал $[a, u]$, не содержащий точку минимума, полагая $a = u$, $f_a = f_u$, $f'_a = f'_u$, и применим первую формулу (4.6). Если же $f'_u > 0$, то исключим интервал $(u, b]$, полагая $b = u$, $f_b = f_u$, $f'_b = f'_u$, и применим вторую формулу (4.25). Вычисления продолжаются, пока расстояние между двумя последовательными точками интерполяции превышает допустимую погрешность ε .

Рассмотренная последовательность действий позволяет найти минимум выпуклой функции. Если же функция не является выпуклой, то точка интерполяции u , вычисленная по одной из формул (4.25), может оказаться вне интервала неопределенности, и это приведет к расхождению процесса одномерного поиска. В этом случае целесообразно применить метод бисекции: если $u \notin [a, b]$, то есть $u < a \vee u > b$, то положим $u = (a + b)/2$ и вычислим $f_u = f(u)$ и $f'_u = f'(u)$. Далее повторяются уже описанные выше действия. Такой комбинированный метод квадратичной интерполяции и бисекции эффективен и для невыпуклых функций.

Метод секущих также основан на аппроксимации функции $f(x)$ по двум ее точкам квадратичным полиномом (4.20) и на интерполяции искомой точки минимума функции x^* точкой минимума этого полинома по формуле (4.22) и значениям первых производных функции.

Первые две точки a и b на концах интервала неопределенности найдем по алгоритму метода Свенна. Вычислим значения производных в этих точках $f'_a = f'(a)$ и $f'_b = f'(b)$. В формуле конечной разности (4.2) при вычислении производной используются значения функции f_a и f_b . Подставляя в уравнение производной (4.21) эти значения, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} q'(a) = 2\alpha a + \beta = f'_a, \\ q'(b) = 2\alpha b + \beta = f'_b. \end{cases}$$

Решая эту систему и подставляя найденные значения коэффициентов α и β в равенство (4.22), получим формулу для вычисления точки минимума аппроксимирующей параболы

$$u = a - \frac{f'_a L}{f'_b - f'_a}, \quad (4.26)$$

где $L = b - a$ — длина интервала неопределенности. Эта формула геометрически соответствует нахождению точки пересечения с осью абсцисс Ox секущей, проведенной через две точки графика функции $f'(x)$, и дает приближение для решения уравнения $f'(x) = 0$.

Затем вычислим $f_u = f(u)$ и $f'_u = f'(u)$. Если $f'_u = 0$, то найдена точка минимума u и вычисления прекращаются. Если $f'_u < 0$, то исключим интервал $[a, u)$, не содержащий точку минимума, полагая $a = u$, $f'_a = f'_u$. Если же $f'_u > 0$, то исключим интервал $(u, b]$, полагая $b = u$, $f'_b = f'_u$. Вычисления продолжаются, пока расстояние между двумя последовательными точками интерполяции превышает допустимую погрешность ε .

Метод секущих также называется *методом хорд*. Достоинством этого метода является простота его формул. Недостатком — медленная сходимость при минимизации невыпуклых функций.

Метод Ньютона основан на аппроксимации функции $f(x)$ по одной ее точке квадратичным полиномом (4.20) и на приближении искомой точки минимума функции x^* точкой минимума этого полинома по формуле (4.22) и значениям первой и второй производных функции.

Первую точку a на конце интервала неопределенности $[a, b]$ со значением целевой функции $f_a = f(a)$ найдем по алгоритму метода Свенна. Вычислим значения первой и второй производных в этой точке $f'_a = f'(a)$ и $f''_a = f''(a)$. В формулах конечных разностей (4.3) при вычислении производных используется значение функции f_a . Дифференцируя равенство (4.21), имеем $q''(x) = 2\alpha$. Подставляя в это равенство и в уравнение производной (4.21) значения производных целевой функции, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} q'(a) = 2\alpha a + \beta = f'_a, \\ q''(a) = 2\alpha = f''_a. \end{cases}$$

Решая эту систему и подставляя найденные значения коэффициентов α и β в равенство (4.3), получим формулу для вычисления точки минимума аппроксимирующей параболы:

$$u = a - \frac{f'_a}{f''_a}. \quad (4.27)$$

Эта формула геометрически соответствует нахождению точки пересечения с осью абсцисс Ox касательной, проведенной из точки a графика функции $f'(x)$, поэтому ее называют *формулой касательной*.

Затем вычислим $f_u = f(u)$, $f'_u = f'(u)$ и $f''_u = f''(u)$. Если $f'_u = 0$, то найдена точка минимума u и вычисления прекращаются. В противном случае положим $a = u$, $f_a = f_u$, $f'_a = f'_u$, $f''_a = f''_u$ и опять применим формулу (4.27). Вычисления продолжаются, пока расстояние между двумя последовательными точками интерполяции превышает допустимую погрешность ε .

Метод Ньютона также называется *методом касательных*. Достоинством этого метода является простота его формулы и высокая скорость сходимости при минимизации выпуклых функций.

Если же функция не является выпуклой, то точка интерполяции u , вычисленная по формуле (4.27), может оказаться вне интервала неопределенности, и это приведет к расхождению процесса одномерного поиска. В этом случае целесообразно применить метод бисекции: если $u \notin [a, b]$, то есть $u < a \vee u > b$, то положим $u = (a + b)/2$, $f'_c = f'(c)$ и только после этого вычислим $f_u = f(u)$, $f'_u = f'(u)$ и $f''_u = f''(u)$. Если $f'_u = 0$, то найдена точка минимума u и вычисления прекращаются. Если $f'_u < 0$, то исключим интервал $[a, u)$, не содержащий точку минимума, полагая $a = u$. Если же $f'_u > 0$, то исключим интервал $(u, b]$, полагая $u = u$. После этого положим $u = u - f'_u / f''_u$. Вычисления продолжаются, пока расстояние между двумя последовательными точками интерполяции превышает допустимую погрешность ε . Такой комбинированный метод Ньютона и бисекции эффективен и для невыпуклых функций.

Методы кубической интерполяции основаны на аппроксимации целевой функции кубическим полиномом:

$$p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad (4.28)$$

где коэффициенты α , β , γ и δ определяются по значениям целевой функции и её производных. Дифференцируя равенство (4.28), имеем:

$$p'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma. \quad (4.29)$$

По необходимому условию существования экстремума $p'(x) = 0$ получим точку минимума полинома (4.9):

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{\beta^2 - 3\alpha\gamma} - \beta}{3\alpha}. \quad (4.30)$$

Однако эта формула теряет смысл, если в результате аппроксимации окажется $\alpha = 0$. В этом случае

$$p(x) = \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad p'(x) = 2\beta x + \gamma, \quad \bar{x} = \frac{-\gamma}{2\beta}.$$

Для того чтобы учесть оба случая $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$, умножим числитель и знаменатель правой части формулы (4.30) на сопряженное для числителя выражение $\sqrt{\beta^2 - 3\alpha\gamma} + \beta$ и после преобразований получим:

$$\bar{x} = \frac{-\gamma}{\sqrt{\beta^2 - 3\alpha\gamma} + \beta}. \quad (4.31)$$

Метод кубической интерполяции с четырьмя точками основан на аппроксимации целевой функции по четырем ее точкам кубическим полиномом (4.28) и на интерполяции искомой точки минимума функции точкой минимума этого полинома по формуле (4.31) и значениям функции.

Первые три точки графика функции (a, f_a) , (b, f_b) , (u, f_u) получим по алгоритму метода Свенна, где $[a, b]$ – интервал неопределенности, $a < u < b$, $f_a = f(a)$, $f_b = f(b)$, $f_u = f(u)$. Четвертую точку (v, f_v) найдем по формулам (4.23) и (4.24) с помощью квадратичной интерполяции по первым трем точкам. Подставляя в уравнение кубического полинома (4.28) координаты четырех известных точек функции составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p(a) = \alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = f_a, \\ p(u) = \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = f_u, \\ p(v) = \alpha v^3 + \beta v^2 + \gamma v + \delta = f_v, \\ p(b) = \alpha b^3 + \beta b^2 + \gamma b + \delta = f_b. \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера и подставляя найденные значения коэффициентов α , β и γ в равенство (4.31), после преобразований получим формулу для вычисления точки минимума аппроксимирующего полинома:

$$w = \frac{-D_\gamma}{\sqrt{D_\beta^2 - 3D_\alpha D_\gamma + D_\beta}}, \quad (4.32)$$

где

$$D_\alpha = -p_a + p_u - p_v + p_b, \quad (4.33)$$

$$D_\beta = p_a(u + v + b) - p_u(a + v + b) + p_v(a + u + b) - p_b(a + u + v), \quad (4.34)$$

$$D_\gamma = -p_a(uv + ub + vb) + p_u(av + ab + vb) - \\ - p_v(au + ab + ub) + p_b(au + av + uv), \quad (4.35)$$

$$p_a = f_a(v - u)(b - u)(b - v), \quad p_u = f_u(v - a)(b - a)(b - v), \quad (4.36)$$

$$p_v = f_v(u - a)(b - a)(b - u), \quad p_b = f_b(u - a)(v - a)(v - u). \quad (4.37)$$

Таким образом, интервал неопределенности разделен тремя внутренними точками u , v и w на четыре части. По правилу исключения интервалов отбрасывается одна из крайних частей и к новому интервалу с двумя известными внутренними точками опять применяется кубическая интерполяция. Итерации продолжаются до тех пор, пока расстояние между двумя последовательными точками интерполяции превышает допустимую погрешность.

Метод кубической интерполяции с четырьмя точками не использует производные целевой функции и поэтому является методом нулевого порядка.

Метод кубической интерполяции с двумя точками основан на аппроксимации целевой функции по двум ее точкам кубическим полиномом (4.28) и на интерполяции искомой точки минимума функции точкой минимума этого полинома по формуле (4.31) с использованием значений функции и ее первой производной.

Первые две точки графика функции (a, f_a) и (b, f_b) на концах интервала неопределенности $[a, b]$ найдем по алгоритму метода Свенна. Вычислим значение производной функции на концах интервала $f'_a = f'(a)$ или $f'_b = f'(b)$.

Подставляя в уравнения кубического полинома и его производной (4.28) и (4.29) известные значения функции и её производной составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p(a) = \alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = f_a, \\ p(b) = \alpha b^3 + \beta b^2 + \gamma b + \delta = f_b, \\ p'(a) = 3\alpha a^2 + 2\beta a + \gamma = f'_a, \\ p'(b) = 3\alpha b^2 + 2\beta b + \gamma = f'_b. \end{cases}$$

Решая эту систему и подставляя найденные значения коэффициентов α , β и γ в равенство (4.31), после преобразований получим формулу для вычисления точки минимума аппроксимирующего полинома:

$$u = a + L \frac{w - f'_a - z}{f'_b - f'_a + 2w}, \quad (4.38)$$

где

$$z = 3(f_b - f_a)/L - f'_a - f'_b, \quad w = \sqrt{z^2 - f'_a f'_b}, \quad (4.39)$$

$L = b - a$ – длина интервала неопределенности. Затем вычислим $f_u = f(u)$ и $f'_u = f'(u)$. Если $f'_u = 0$, то найдена точка минимума u и вычисления прекращаются. Если $f'_u < 0$, то положим $a = u$, $f_a = f_u$, $f'_a = f'_u$, в противном случае положим $b = u$, $f_b = f_u$, $f'_b = f'_u$. Вычисления продолжаются, пока расстояние между двумя последовательными точками интерполяции больше допустимой погрешности ε .

4.9. Рекомендуемые алгоритмы методов аппроксимации и интерполяции

Алгоритм метода бисекции.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; c и f_c – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $c = 0,5 \cdot (a + b)$, $f_c = f(c)$, $f'_c = f'(c)$.
2. Положить $i = i + 1$, $P_i = c$, $F_i = f_c$.

3. Если $f'_c = 0$, то перейти к шагу 7.
4. Если $f'_c < 0$, то положить $a = c$, иначе положить $b = c$.
5. Вычислить $L = b - a$.
6. Если $L > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.
7. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 1 вычисляется значение производной целевой функции численным методом дифференцирования.

Рассмотренные методы аппроксимации и интерполяции можно реализовать по следующим алгоритмам.

Метод квадратичной интерполяции с тремя точками построен по рабочим формулам (4.23) и (4.24).

Алгоритм метода квадратичной интерполяции с тремя точками.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; u и f_u – внутренняя точка интервала и значение функции в ней; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; v и f_v – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $p = (u - a)(f_b - f_u)$, $q = (b - u)(f_a - f_u)$, $s = p + q$.
2. Вычислить $v = 0,5 \cdot [p \cdot (a + u) + q \cdot (b + u)] / s$, $f_v = f(v)$.
3. Положить $h = v - u$, $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
4. Если $v < u$, то положить $w = u$, $f_w = f_u$, $u = v$, $f_u = f_v$, $v = w$, $f_v = f_w$.
5. Если $f_u < f_v$, то положить $b = v$, $f_b = f_v$, иначе положить $a = u$, $f_a = f_u$, $u = v$, $f_u = f_v$.
6. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.
7. Остановиться.

На основании формул (4.25) составлен алгоритм метода квадратичной интерполяции с двумя точками.

Алгоритм метода квадратичной интерполяции с двумя точками.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; u и f_u – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $f'_a = f'(a)$.
2. Вычислить $L = b - a$, $p = f'_a \cdot L$, $d_f = f_b - f_a$.
3. Вычислить $u = a + 0,5 \cdot p \cdot L / (p - d_f)$.
4. Если $u < a \vee u > b$, то вычислить $u = 0,5 \cdot (a + b)$.
5. Вычислить $f_u = f(u)$, $f'_u = f'(u)$.
6. Положить $v = u$, $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$.
7. Если $f'_u = 0$, то перейти к шагу 19.
8. Если $f'_u > 0$, то перейти к шагу 12.
9. Положить $a = u$, $f_a = f_u$, $f'_a = f'_u$.
10. Вычислить $L = b - a$, $p = f'_a \cdot L$, $d_f = f_b - f_a$.
11. Вычислить $u = a + 0,5 \cdot p \cdot L / (p - d_f)$ и перейти к шагу 15.
12. Положить $b = u$, $f_b = f_u$, $f'_b = f'_u$.
13. Вычислить $L = b - a$, $p = f'_b \cdot L$, $d_f = f_b - f_a$.
14. Вычислить $u = b - 0,5 \cdot p \cdot L / (p - d_f)$.
15. Если $u < a \vee u > b$, то вычислить $u = 0,5 \cdot (a + b)$.
16. Вычислить $h = u - v$, $f_u = f(u)$, $f'_b = f'_u$, $f'_u = f'(u)$.
17. Положить $v = u$, $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$.
18. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 7.
19. Остановиться.

В этом алгоритме на шагах 1, 5 и 16 вычисляются значения производной целевой функции численным методом дифференцирования.

На основании итерационной формулы (4.26) составлен алгоритм метода секущих.

Алгоритм метода секущих.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; u и f_u – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $f'_a = f'(a)$, $f'_b = f'(b)$, $L = b - a$,
2. Положить $h = L$, $v = a$.
3. Вычислить $u = a - f'_a \cdot L / (f'_b - f'_a)$, $f_u = f(u)$, $f'_u = f'(u)$.
4. Положить $h = u - v$, $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$.
5. Если $f'_u = 0$, то перейти к шагу 9.
6. Если $f'_u < 0$, то положить $a = u$, $f'_a = f'_u$, иначе положить $b = u$, $f'_b = f'_u$.
7. Вычислить $L = b - a$.
8. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.
9. Остановиться.

В этом алгоритме на шагах 1 и 3 вычисляются значения производной целевой функции численным методом.

На основании формулы (4.27) составлен алгоритм модифицированного метода Ньютона с методом бисекции.

Алгоритм метода Ньютона.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; u и f_u – конечная точка и значение функции в ней.

1. Положить $u = a$, $v = a$.
2. Вычислить $f'_a = f'(a)$, $f''_a = f''(a)$.

3. Вычислить $u = a - f'_a / f''_a$.
4. Если $u < a \vee u > b$, то вычислить $u = 0,5 \cdot (a + b)$.
5. Вычислить $f_u = f(u)$, $f'_u = f'(u)$, $f''_u = f''(u)$.
6. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$, $h = u - v$, $v = u$.
7. Если $f'_u = 0$, то перейти к шагу 11.
8. Если $f'_u < 0$, то положить $a = u$, иначе положить $b = u$.
9. Вычислить $u = u - f'_u / f''_u$.
10. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 4.
11. Остановиться.

В этом алгоритме на шагах 2 и 5 вычисляются значения первой и второй производных целевой функции по формулам конечных разностей (4.3). Предлагается вычислять значения первой и второй производных с помощью одной процедуры, которая использует два дополнительных вычисления функции.

На основании формул (4.32)–(4.37) составлен алгоритм метода кубической интерполяции с четырьмя точками.

Алгоритм метода кубической интерполяции с четырьмя точками.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; u и f_u – внутренняя точка интервала и значение функции в ней; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; w и f_w – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $p = (u - a)(f_b - f_u)$, $q = (b - u)(f_a - f_u)$, $s = p + q$.
2. Вычислить $v = 0,5 \cdot [p \cdot (a + u) + q \cdot (b + u)] / s$, $f_v = f(v)$.
3. Положить $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$, $z = v$.
4. Если $v < u$, то положить $c = u$, $f_c = f_u$, $u = v$, $f_u = f_v$, $v = c$, $f_v = f_c$.
5. Вычислить $d_{ua} = u - a$, $d_{va} = v - a$, $d_{ba} = b - a$, $d_{vu} = v - u$,
 $d_{bu} = b - u$, $d_{bv} = b - v$, $s_{au} = a + u$, $s_{vb} = v + b$, $r_{au} = a \cdot u$, $r_{vb} = v \cdot b$,
 $p_a = f_a \cdot d_{vu} \cdot d_{bu} \cdot d_{bv}$, $p_u = f_u \cdot d_{va} \cdot d_{ba} \cdot d_{bv}$, $p_v = f_v \cdot d_{ua} \cdot d_{ba} \cdot d_{bu}$,

$$p_b = f_b \cdot d_{ua} \cdot d_{va} \cdot d_{vu}, \quad D_\alpha = p_u - p_a - p_v + p_b,$$

$$D_\beta = p_a \cdot (u + s_{vb}) - p_u \cdot (a + s_{vb}) + p_v \cdot (s_{au} + b) - p_b \cdot (s_{au} + v),$$

$$D_\gamma = p_u \cdot (s_{vb} \cdot a + r_{vb}) - p_a \cdot (s_{vb} \cdot u + r_{vb}) - p_v \cdot (r_{au} + s_{au} \cdot b) + p_b \cdot (r_{au} + s_{au} \cdot v).$$

6. Вычислить $w = \frac{-D_\gamma}{\sqrt{D_\beta^2 - 3 \cdot D_\alpha \cdot D_\gamma + D_\beta}}, f_w = f(w), h = w - z.$

7. Положить $i = i + 1, P_i = w, F_i = f_w, z = w.$

8. Если $w < u$, то положить $c = u, f_c = f_u, u = w, f_u = f_w, w = c, f_w = f_c.$

9. Если $w < v$, то положить $c = v, f_c = f_v, v = w, f_v = f_w, w = c, f_w = f_c.$

10. Если $f_u < f_w$, то положить $b = w, f_b = f_w$, иначе положить $a = u, f_a = f_u, u = v, f_u = f_v, v = w, f_v = f_w.$

11. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 5.

12. Остановиться.

На шагах 1–4 выполняется квадратичная интерполяция, а на шагах 5–10 производится итерация метода кубической интерполяции.

По формулам (4.38) и (4.39) составлен алгоритм метода кубической интерполяции с двумя точками.

Алгоритм метода кубической интерполяции с двумя точками.

Входные параметры: f – целевая функция; P и F – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: P – массив всех точек поиска; F – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; u и f_u – конечная точка и значение функции в ней.

1. Положить $v = a.$

2. Вычислить $f'_a = f'(a), f'_b = f'(b).$

3. Положить $L = b - a.$

4. Вычислить $z = 3 \cdot (f_b - f_a) / L - f'_a - f'_b, w = \sqrt{z^2 - f'_a \cdot f'_b}.$

5. Вычислить $u = a + L \cdot (w - f'_a - z) / (f'_b - f'_a + 2 \cdot w).$

6. Вычислить $h = u - v, f_u = f(u), f'_u = f'(u).$

7. Положить $v = u, i = i + 1, P_i = u, F_i = f_u$.
8. Если $f'_u = 0$, то перейти к шагу 11.
9. Если $f'_u < 0$, то положить $a = u, f_a = f_u, f'_a = f'_u$, иначе положить $b = u, f_b = f_u, f'_b = f'_u$.
10. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.
11. Остановиться.

В этом алгоритме на шагах 2 и 6 вычисляются значения производной целевой функции численным методом дифференцирования.

Контрольные вопросы к разделу 4

1. Для решения какой задачи предназначены методы одномерного поиска?
2. Дайте определения минимума и максимума функции одной переменной.
3. Как ставится задача одномерного поиска при разработке программного обеспечения методов оптимизации?
4. Как решаются задачи максимизации функции?
5. Дайте определение производной функции одной переменной.
6. Дайте определение стационарной точки.
7. Сформулируйте теорему Ферма и объясните ее геометрический смысл.
8. Сформулируйте необходимый признак существования экстремума функции одной переменной.
9. Сформулируйте необходимый и достаточный признак существования экстремума функции одной переменной.
10. Как исследовать функцию одной переменной на экстремум с помощью второй производной этой функции?
11. Дайте определение решения задачи одномерной оптимизации.
12. Что представляет собой метод одномерного поиска?
13. Объясните алгоритм итерационного метода приближения к точке минимума.
14. Объясните алгоритм построения графика итерационного процесса.
15. Какие функции называются строго убывающими и строго возрастающими?

16. Дайте определение унимодальной функции.
17. Какие функции называются выпуклыми и строго выпуклыми?
18. Какие функции называются вогнутыми и строго вогнутыми?
19. Какая особенность выпуклой функции, имеющей минимум?
20. Дайте определение интервала неопределенности.
21. Из каких этапов состоят методы одномерного поиска?
22. Какое наименьшее количество точек на графике функции надо знать, чтобы определить интервал неопределенности?
23. Какое наименьшее количество точек внутри интервала неопределенности необходимо определить, чтобы уменьшить этот интервал?
24. Сформулируйте правило исключения интервалов.
25. Для чего предназначен метод Свенна?
26. Как изменяется величина шага в методе Свенна?
27. При каком условии заканчиваются вычисления в методе Свенна?
28. Какого порядка метод Свенна?
29. Объясните алгоритм метода Свенна.
30. Чем отличается пассивная стратегия поиска интервала неопределенности?
31. Какое назначение метода равномерного поиска?
32. Опишите метод равномерного поиска.
33. Как оценивается эффективность метода равномерного поиска?
34. Чем отличаются последовательные методы одномерного поиска интервала неопределенности?
35. Какое назначение метода дихотомии?
36. Какие основные принципы метода дихотомии?
37. Опишите метод дихотомии.
38. Как оценивается эффективность метода дихотомии?
39. Какого порядка метод дихотомии?
40. Какое назначение метода деления интервала пополам?
41. Опишите метод деления интервала пополам.
42. Оцените эффективность метода деления интервала пополам?
43. Какого порядка метод деления интервала пополам?
44. По какой формуле определяются числа Фибоначчи?
45. Запишите 10 первых чисел Фибоначчи.
46. Какое назначение метода Фибоначчи?
47. На каких принципах основан метод Фибоначчи.
48. Опишите метод Фибоначчи.

49. Как начинается поиск минимума в методе Фибоначчи?
50. Как оценивается эффективность метода Фибоначчи?
51. Какого порядка метод Фибоначчи?
52. Приведите численное представление золотого сечения.
53. Какое назначение метода золотого сечения?
54. Опишите метод золотого сечения.
55. Как начинается поиск минимума в методе золотого сечения?
56. Как оценивается эффективность метода золотого сечения?
57. Какого порядка метод золотого сечения?
58. Какое назначение метода адаптации шага?
59. Опишите метод адаптации шага.
60. По какому правилу изменяется шаг в методе адаптации шага?
61. Какого порядка метод адаптации шага?
62. Какое назначение метода квадратичной интерполяции с тремя точками?
63. Опишите метод квадратичной интерполяции с тремя точками.
64. Как начинается поиск минимума в методе квадратичной интерполяции с тремя точками?
65. Какого порядка метод квадратичной интерполяции с тремя точками?
66. Какие преимущества и недостатки метода квадратичной интерполяции с тремя точками?
67. Какое назначение метода кубической интерполяции с четырьмя точками?
68. Опишите метод кубической интерполяции с четырьмя точками.
69. Как начинается поиск минимума в методе кубической интерполяции с четырьмя точками?
70. Какого порядка метод кубической интерполяции с четырьмя точками?
71. Какие преимущества и недостатки метода кубической интерполяции с четырьмя точками?
72. Какое назначение метода квадратичной интерполяции с двумя точками?
73. Опишите метод квадратичной интерполяции с двумя точками.
74. Какие преимущества и недостатки метода квадратичной интерполяции с двумя точками?
75. Какое назначение метода секущих?

76. Опишите метод секущих.
77. Какого порядка метод секущих?
78. Какие преимущества и недостатки метода секущих?
79. Какое назначение метода кубической интерполяции с двумя точками?
80. Опишите метод кубической интерполяции с двумя точками.
81. Какие преимущества и недостатки метода кубической интерполяции с двумя точками?
82. Какое назначение метода Ньютона?
83. Приведите итерационную формулу метода Ньютона.
84. Опишите метод Ньютона.
85. Какого порядка метод Ньютона?
86. Как еще называют метод Ньютона?
87. Какие преимущества и недостатки метода Ньютона?

Раздел 5

ОСНОВЫ МЕТОДОВ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

5.1. Основные понятия многомерной оптимизации

Многомерная безусловная минимизация используется в методах условной оптимизации и во многом определяет их практическую эффективность. В данном разделе рассматриваются вопросы, связанные с основными положениями теории многомерной безусловной оптимизации, и базовые методы. Даются определения минимума, максимума и экстремума функции многих переменных, анализируются свойства экстремума, приводятся понятия выпуклой и вогнутой функций. Формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных. Описывается метод циклического покоординатного спуска. Рассматриваются общие формулы и свойства методов спуска. Обосновывается метод наискорейшего спуска и дается алгоритм метода. Рассматриваются формулы для вычисления градиента функции многих переменных.

Экстремум функции многих переменных

Методы безусловной оптимизации предназначены для вычисления экстремума целевой функции многих переменных $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор-столбец вещественных переменных, который также можно трактовать как точку n -мерного пространства $\mathbf{x} \in R^n$. Здесь и далее n – количество переменных, определяющее размерность вектора переменных параметров.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой локального минимума* функции $f(\mathbf{x})$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ для всех \mathbf{x} , удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой строгого локального минимума* функции $f(\mathbf{x})$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ для всех \mathbf{x} , удовлетворяющих условиям $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ и $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой глобального минимума* функции $f(\mathbf{x})$, если $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in R^n$.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой строгого глобального минимума* функции $f(\mathbf{x})$, если $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$.

Соответствующее значение функции $f^* < f(\mathbf{x}^*)$ называется ее *локальным минимумом, строгим локальным минимумом, глобальным минимумом, строгим глобальным минимумом*. Глобальный минимум является также и локальным минимумом.

Аналогично вводятся понятия *точек максимума* и *максимума* функции многих переменных. Минимум и максимум имеют общее название *экстремум*.

Для определенности методов оптимизации в них полагают, что необходимо найти точку минимума функции. Если для некоторой функции $g(\mathbf{x})$ необходимо найти максимум, то переходят к минимизации функции $f(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x})$.

Задача безусловной минимизации заключается в минимизации функции $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in R^n$, что представляется в виде:

$$\min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n. \quad (5.1)$$

На вектор \mathbf{x} не накладывается никаких ограничений (условий), поэтому задача (5.1) минимизации функции $f(\mathbf{x})$ называется *задачей безусловной оптимизации* или *задачей оптимизации без ограничений*.

Функция, имеющая несколько минимумов или максимумов, называется *многоэкстремальной*.

Функция $f(\mathbf{x})$ называется *унимодальной*, если она имеет в пространстве параметров R^n единственную точку минимума \mathbf{x}^* .

Решение задачи безусловной минимизации (1.1) представляется в виде:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n.$$

Функция $f(\mathbf{x})$ называется *выпуклой*, если

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad (5.2)$$

для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^n$ и любого $\lambda \in (0; 1)$. Функция $f(\mathbf{x})$ называется *строго выпуклой*, если неравенство (1.2) является строгим для всех различных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ и для любого $\lambda \in (0; 1)$. Функция $f(\mathbf{x})$ называется *вогнутой* (*строго вогнутой*), если $-f(\mathbf{x})$ выпуклая (строго выпуклая). Выпуклые и вогнутые функции являются непрерывными функциями.

Дадим геометрическую интерпретацию выпуклой функции. Пусть $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}$ — две различные точки и определим точку $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}$ с $\lambda \in (0; 1)$. Заметим, что $y = f(\mathbf{w}) = f(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v})$ представляет значение функции в точке \mathbf{w} , и точка (\mathbf{w}, y) лежит на графике функции (рис. 5.1, а). Величина $z = \lambda f(\mathbf{u}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{v})$ дает взвешенную сумму $f(\mathbf{u})$ и $f(\mathbf{v})$, а точка (\mathbf{w}, z) лежит на графике секущей. Неравенство (5.2) примет вид $y \leq z$.

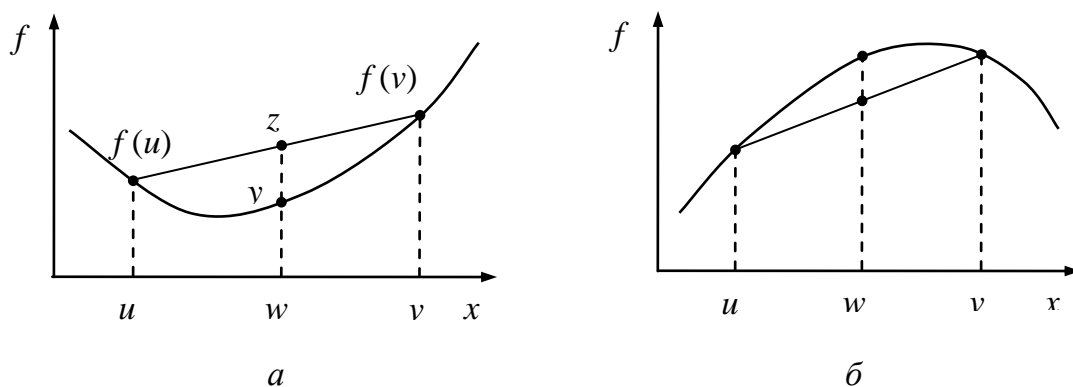


Рис. 5.1. Выпуклая и вогнутая функции

Таким образом, для выпуклой функции $f(\mathbf{x})$ значение в точках линии сегмента $\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}$ не больше высоты хорды, соединяющей точки $(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$ и $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$ (рис. 5.1, а). Для вогнутой функции хорда, соединяющая точки $(\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$ и $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$, проходит не выше графика функции между точками \mathbf{u} и \mathbf{v} (рис. 5.1, б).

Теорема 1.1. Если функция $f(\mathbf{x})$ является выпуклой, то она в любой точке локального минимума достигает своего наименьшего значения.

Доказательство. Пусть \mathbf{x}^* — точка локального минимума функции $f(\mathbf{x})$. Предположим, что в этой точке значение функции $f^* = f(\mathbf{x}^*)$ не является наименьшим, то есть существует точка \mathbf{y}^* , для которой $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$.

Рассмотрим сечение функции $f(\mathbf{x})$, проходящее через пару точек \mathbf{y}^* , \mathbf{x}^* и определяющее функцию одной переменной $\varphi(\lambda) = f(\lambda \mathbf{y}^* + (1 - \lambda) \mathbf{x}^*)$. Тогда с учетом неравенства (1.2) при $\lambda \in (0; 1)$

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda \mathbf{y}^* + (1 - \lambda) \mathbf{x}^*) \leq \lambda f(\mathbf{y}^*) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}^*).$$

Отсюда, поскольку $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$, имеем

$$\varphi(\lambda) < \lambda f(\mathbf{x}^*) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) = \varphi(0).$$

Это означает, что в точке $\lambda = 0$ функция $\varphi(\lambda)$ достигает на отрезке $[0; 1]$ своего наибольшего значения. Для произвольной окрестности точки \mathbf{x}^* существует такое малое число $\lambda > 0$, что $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}^* + (1 - \lambda) \mathbf{x}^*$ принадлежит этой окрестности, то есть $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \lambda$. Тогда $f(\mathbf{x}) = \varphi(\lambda) < \varphi(0) = f(\mathbf{x}^*)$.

А это противоречит тому, что точка \mathbf{x}^* есть точка локального минимума. \square

Из доказанной теоремы вытекают важные следствия.

Следствие 5.1. *Во всех точках локального минимума выпуклая функция $f(\mathbf{x})$ имеет одно и то же значение, равное наименьшему значению f^* этой функции, а локальный минимум является и глобальным минимумом.*

Следствие 5.2. *Строго выпуклая функция может иметь не более одной точки локального минимума.*

Доказательство. Предположим, что \mathbf{x}^* и \mathbf{y}^* — две различные точки локального минимума строго выпуклой функции $f(\mathbf{x})$ и в этих точках функция достигает своего наименьшего значения f^* . Поскольку функция $f(\mathbf{x})$ строго выпуклая, то неравенство (5.2) является строгим. Тогда для любого $\lambda \in (0; 1)$ и $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda) \mathbf{y}^*$ имеем:

$$f(\mathbf{x}) = f(\lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda) \mathbf{y}^*) < \lambda f(\mathbf{x}^*) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}^*) = \lambda f^* + (1 - \lambda) f^* = f^*.$$

Мы получили, что $f(\mathbf{x}) < f^*$, а это невозможно, так как f^* — наименьшее значение функции. \square

Численные методы решения задачи (5.1) называются *методами безусловной минимизации* или *методами минимизации без ограничений*. Существуют следующие классы методов безусловной минимизации.

1. Методы нулевого порядка (прямого поиска), не использующие производные целевой функции $f(\mathbf{x})$.

2. Методы первого порядка, использующие первые частные производные целевой функции $f(\mathbf{x})$.

3. Методы второго порядка, использующие матрицу вторых частных производных целевой функции $f(\mathbf{x})$.

Рассматриваемые в данном пособии методы оптимизации предназначены для минимизации унимодальных функций, а также для вычисления локального минимума целевой функции.

Простейшей функцией $f(\mathbf{x})$ нескольких переменных является функция двумерного вектора переменных $\mathbf{x} = (x_1; x_2)^T$, $n = 2$. *Линией уровня* функции двух переменных называется линия, во всех точках которой функция принимает постоянное значение. Уравнение линии уровня имеет вид $f(\mathbf{x}) = C$, где C – некоторая постоянная величина. Изменяя значение C , получим семейство линий уровня.

Для функции трех переменных с $n = 3$ уравнение $f(\mathbf{x}) = C$ представляет *поверхность уровня*. Для $n > 3$ уравнение $f(\mathbf{x}) = C$ представляет *гиперповерхность уровня*.

Пример 5.1. Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1,2x_1x_2. \quad (5.3)$$

Преобразуем эту функцию, выделяя полный квадрат:

$$f(\mathbf{x}) = (x_1^2 - 1,2x_1x_2 + 0,36x_2^2) - 0,36x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - 0,6x_2)^2 + 0,64x_2^2.$$

Это неотрицательная функция и для нее $f(\mathbf{x}) \geq 0$. Она является суммой квадратов функций $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 0,6x_2$ и $f_2(\mathbf{x}) = 0,8x_2$. Приравнявая нулю эти функции, получим систему уравнений: $x_1 = 0,6x_2$, $x_2 = 0$. Система уравнений имеет единственное решение $\mathbf{x}^* = (0; 0)^T$. Это точка строгого глобального минимума функции (5.3) с минимальным ее значением $f^* = 0$, поскольку для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ будет $f(\mathbf{x}) > 0$. График функции (5.3) представлен на рис. 5.2, где точка минимума отмечена звездочкой. На рис. 5.3 показаны линии уровня этой функции, которые представляют собой эллипсы с соответствующими значениями функции. Функция (5.3) соответствует эллиптическому параболоиду.

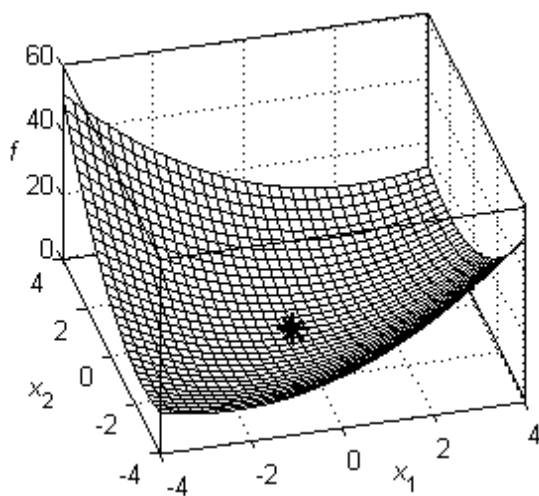


Рис. 5.2. График функции

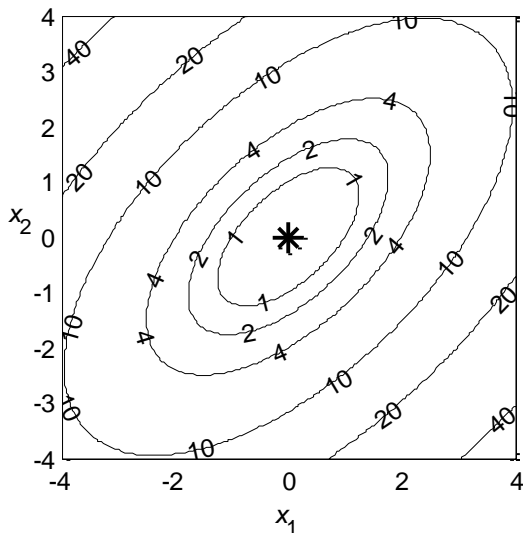


Рис. 5.3. Линии уровня функции

Пример 5.2. Рассмотрим функцию Розенброка

$$f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2. \quad (5.4)$$

Это также неотрицательная функция. Она представляет собой сумму квадратов функций $f_1(\mathbf{x}) = 10(x_2 - x_1^2)$ и $f_2(\mathbf{x}) = 1 - x_1$, приравнявая нулю которые имеем систему уравнений: $x_2 = x_1^2$, $x_1 = 1$. Полученная система имеет единственное решение $\mathbf{x}^* = (1; 1)^T$. Это точка строгого глобального минимума функции Розенброка с минимальным значением функции $f^* = 0$, так как для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ будет $f(\mathbf{x}) > 0$.

График функции (5.4) представлен на рис. 5.4. На рис. 5.5 показаны линии уровня этой функции, которые вытянуты вдоль параболической линии $x_2 = x_1^2$, определяющей дно искривленного оврага. Поскольку линии уровня напоминают линии разреза банана, функцию Розенброка называют также «бананообразной» функцией. Она является одной из основных тестовых функций для проверки эффективности многомерных методов безусловной минимизации, которые стартуют из начальной точки $\mathbf{x}_0 = (-1, 2; 1)^T$. На рис. 5.4 и 5.5 отмечены: звездочкой – точка минимума \mathbf{x}^* , кругом – начальная точка \mathbf{x}_0 , штриховой линией – дно оврага функции Розенброка. Поскольку начальная точка расположена на дальнем склоне

оврага относительно точки минимума функции, то для достижения точки минимума метод оптимизации должен преодолеть искривленный овраг с одним поворотом, что является непростой задачей.

Только тот численный метод оптимизации, который сможет минимизировать функцию Розенброка из заданной начальной точки, может считаться эффективным для минимизации гладких функций.

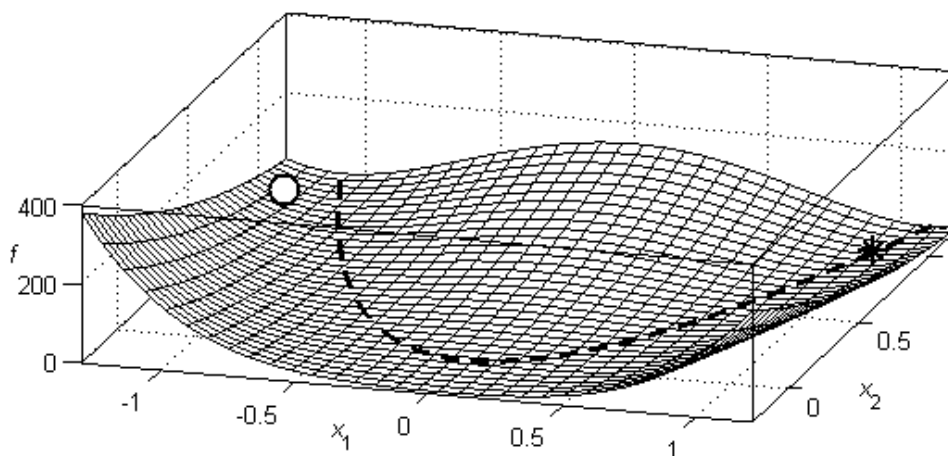


Рис. 5.4. График функции Розенброка

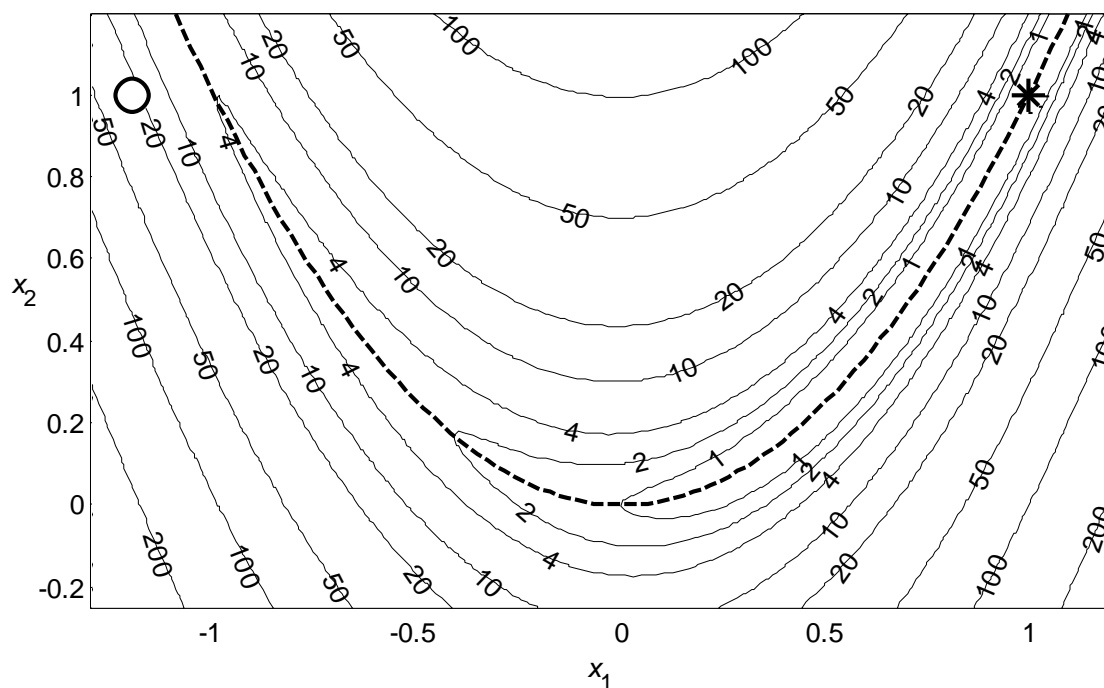


Рис. 5.5. Линии уровня функции Розенброка

Условия оптимальности первого порядка

При изучении задач оптимизации важное место занимает вопрос об *условиях оптимальности*. *Необходимые* условия оптимальности – это условия, которым должна удовлетворять точка, являющаяся решением задачи. *Достаточные* условия оптимальности – это условия, из которых следует, что данная точка является решением задачи. Большое значение условий оптимальности определяется тем, что они составляют основу качественных методов изучения свойств экстремальных задач, используются при обосновании численных методов оптимизации, позволяют в простых случаях явно решить задачу.

Пусть целевая функция $f(\mathbf{x})$ является дифференцируемой при всех $\mathbf{x} \in R^n$. Вектор-столбец частных производных функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} называется *градиентом* и обозначается

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^T. \quad (5.5)$$

В формулах градиент часто обозначают вектором $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$.

Необходимое условие существования экстремума функции нескольких переменных $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}^* представляется теоремой, аналогичной теореме для экстремума функции одной переменной.

Теорема 5.2. *Если дифференцируемая функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}^* экстремум, то*

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (5.6)$$

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}^* минимум. Разложим функцию $f(\mathbf{x})$ в окрестности точки \mathbf{x}^* в ряд Тейлора, ограничиваясь слагаемыми не выше первого порядка малости,

$$f(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|).$$

Положим $\Delta \mathbf{x} = -\alpha \nabla f(\mathbf{x}^*)$, где $\alpha > 0$ – некоторое малое число. Тогда с точностью до бесконечно малых первого порядка имеем

$$0 \leq f(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) = -\alpha \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \nabla f(\mathbf{x}^*).$$

Разделив это выражение на α , приходим к неравенству

$$0 \leq -\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|^2,$$

откуда следует, что $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$. \square

Итак, для дифференцируемой по всем n переменным функции по этой теореме с учетом (5.5) и (5.6) получим:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.7)$$

Точка \mathbf{x}^* , удовлетворяющая этому условию, называется *стационарной* точкой. Это необходимое условие экстремума, общее для минимума и максимума. Данному условию также удовлетворяют *седловые* точки, которые соответствуют минимуму функции по одним направлениям и её максимуму по другим.

Локальный минимум функции может достигаться и в точках, в которых первые частные производные функции не существуют. Такие точки называются *критическими*. Точку глобального минимума функции, если она существует, можно искать, сравнивая значения функции во всех стационарных и критических точках. Выяснять, какие из этих точек являются точками локального минимума, не обязательно.

Использование необходимого условия локального экстремума приводит к решению системы нелинейных уравнений (5.7), что является сложной задачей. Функция может иметь большое или даже бесконечное число стационарных точек, и тогда выбрать среди них точку с наименьшим значением функции сложно. Для выпуклых функций эта задача существенно упрощается.

Теорема 5.3. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ выпукла и дифференцируема в точке \mathbf{x}^* . Тогда, если $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$, то \mathbf{x}^* — точка глобального минимума функции $f(\mathbf{x})$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\mathbf{x} \in R^n$ и рассмотрим сечение функции $f(\mathbf{x})$, проходящее через точки \mathbf{x} , \mathbf{x}^* и определяющее функцию одной переменной $\varphi(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^*)$, где $\lambda \in [0; 1]$. Для такой функции $\varphi(0) = f(\mathbf{x}^*)$, $\varphi(1) = f(\mathbf{x})$. Из выпуклости функции $f(\mathbf{x})$ следует и выпуклость ее сечения $\varphi(\lambda)$, поэтому с учетом свойства (5.2) выпуклой функции $\varphi(\lambda) \leq \lambda\varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0)$. Отсюда $\varphi(\lambda) - \varphi(0) \leq \lambda[\varphi(1) - \varphi(0)]$, $[\varphi(\lambda) - \varphi(0)] / \lambda \leq \varphi(1) - \varphi(0)$ и

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda}.$$

Тогда $\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$. По правилу дифференцирования сложной функции $\varphi'(0) = \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$, и в силу условия $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ имеем $\varphi(1) - \varphi(0) \geq 0$, то есть $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$. \square

Доказанная теорема является достаточным условием минимума выпуклой функции. Из этой теоремы и теоремы 5.2 вытекает необходимое и достаточное условие минимума выпуклой функции.

Следствие 5.3. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ выпукла и дифференцируема в точке \mathbf{x}^* . Для того, чтобы точка \mathbf{x}^* была точкой глобального минимума функции $f(\mathbf{x})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$.

Необходимое условие оптимальности первого порядка (5.7) для выпуклых функций является и достаточным условием. В этом случае локальный минимум является также и глобальным.

Условия оптимальности второго порядка

Необходимое условие оптимальности первого порядка в общем случае не является достаточным условием оптимальности, поскольку стационарная точка не обязана быть решением задачи безусловной минимизации (1.1). Для анализа стационарных точек применяются условия оптимальности второго порядка, основанные на вторых производных целевой функции.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ является дважды дифференцируемой и существует матрица вторых частных производных целевой функции – матрица Гессе

$$\nabla^2(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

В силу теоремы Шварца

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Поэтому матрица Гессе (5.8) – симметрическая матрица и для нее

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})^T = \mathbf{H}(\mathbf{x}). \quad (5.9)$$

Для строго выпуклой функции матрица Гессе является положительно определенной матрицей, а для строго вогнутой функции матрица Гессе отрицательно определенная.

Для выявления лишних стационарных точек может использоваться необходимое условие оптимальности второго порядка.

Теорема 5.4. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дважды дифференцируема в точке \mathbf{x}^* . Тогда, если \mathbf{x}^* – точка локального минимума функции $f(\mathbf{x})$, то матрица Гессе этой функции в точке \mathbf{x}^* $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ неотрицательно определена:

$$\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \geq 0, \quad \forall \mathbf{d} \in R^n. \quad (5.10)$$

Доказательство. Разложим функцию $f(\mathbf{x})$ в окрестности точки \mathbf{x}^* в ряд Тейлора, ограничиваясь слагаемыми не выше второго порядка малости,

$$f(\mathbf{x}^* + \lambda \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\lambda \mathbf{d}) + \frac{1}{2!} (\lambda \mathbf{d})^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) (\lambda \mathbf{d}) + o(\lambda^2).$$

Тогда с учетом (1.6) при достаточно малых λ имеем

$$0 \leq f(\mathbf{x}^* + \lambda \mathbf{d}) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2!} \lambda^2 \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} + o(\lambda^2).$$

Разделив обе части неравенства на $\lambda^2/2$ и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим (5.10). \square

Достаточное условие локальной оптимальности содержит характерное усиление требований к матрице Гессе.

Теорема 5.5. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дважды дифференцируема в точке \mathbf{x}^* . Тогда, если $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ и матрица Гессе функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}^* положительно определена, то есть

$$\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} > 0, \quad \forall \mathbf{d} \in R^n, \quad \mathbf{d} \neq 0, (1.11)$$

то \mathbf{x}^* — точка строгого локального минимума функции $f(\mathbf{x})$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существуют точки, близкие к точке \mathbf{x}^* , со значением функции, не большим, чем в точке \mathbf{x}^* . Составим из них последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, удовлетворяющую условиям:

$$\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}^*, \quad f(\mathbf{x}_k) \leq f(\mathbf{x}^*).$$

Представим \mathbf{x}_k в виде $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}^* + \lambda_k \mathbf{d}_k$, где $\lambda_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$, $\mathbf{d}_k = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) / \lambda_k$. Поскольку $\|\mathbf{d}_k\| = 1$, то без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{d}_k \rightarrow \mathbf{d} \neq 0$. Составим ряд Тейлора, ограничиваясь слагаемыми не выше второго порядка малости

$$f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\lambda_k \mathbf{d}_k) + \frac{1}{2!} (\lambda_k \mathbf{d}_k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) (\lambda_k \mathbf{d}_k) + o(\lambda_k^2).$$

Тогда с учетом (1.6) имеем

$$0 \geq f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \lambda_k^2 \mathbf{d}_k^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d}_k + o(\lambda_k^2).$$

Разделив обе части неравенства на $\lambda_k^2/2$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим противоречие с (5.11). \square

Для функции $f(x)$ скалярного аргумента x условия (5.10) и (5.11) означают, что вторая производная $f''(x^*)$ неотрицательна и положительна соответственно.

Заметим, что необходимые условия оптимальности, представленные теоремами 5.2 и 5.4, не являются достаточными. Например, для функции $f(x) = x^3$ эти условия выполнены в точке перегиба $\bar{x} = 0$, которая не является точкой минимума. Условия теоремы 5.5 не являются необходимыми для оптимальности. Для функции $f(x) = x^4$ эти условия не выполнены в точке строгого минимума $x^* = 0$, поскольку $f'(x^*) = 0$ и $f''(x^*) = 0$.

В тех случаях, когда функция $f(\mathbf{x})$ достаточно проста, теоремы 5.2, 5.3 и 5.4 позволяют явно решить задачу (5.1). При этом для исследования матрицы $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) = 0$ на положительную и отрицательную определенность, как правило, используется критерий Сильвестра – Якоби.

Теорема 5.6. Пусть \mathbf{x}^* является стационарной точкой функции $f(\mathbf{x})$, для которой $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$, и пусть в этой точке и в некоторой ее окрестности функция $f(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков. Тогда:

1) если определитель матрицы Гессе

$$\Delta_n(\mathbf{x}^*) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

и все его главные диагональные миноры $\Delta_1(\mathbf{x}^*)$, $\Delta_2(\mathbf{x}^*)$, ..., $\Delta_{n-1}(\mathbf{x}^*)$ положительны, то в точке \mathbf{x}^* функция $f(\mathbf{x})$ имеет минимум;

2) если определители $\Delta_1(\mathbf{x}^*)$, $\Delta_2(\mathbf{x}^*)$, ..., $\Delta_{n-1}(\mathbf{x}^*)$, $\Delta_n(\mathbf{x}^*)$ имеют соответственно знаки $-$, $+$, $-$, $+$, ..., то в точке \mathbf{x}^* функция $f(\mathbf{x})$ имеет максимум;

3) если $\Delta_n(\mathbf{x}^*) \neq 0$, а числа $\Delta_1(\mathbf{x}^*)$, $\Delta_2(\mathbf{x}^*)$, ..., $\Delta_{n-1}(\mathbf{x}^*)$, $\Delta_n(\mathbf{x}^*)$ ни положительны, ни знакопереваются по закону $-$, $+$, $-$, $+$, ..., то в точке \mathbf{x}^* функция $f(\mathbf{x})$ не имеет экстремума.

Примечание 5.1. Теорема 5.6 решает задачу исследования функции нескольких переменных на экстремум не полностью. Возможен случай, когда $\Delta_n(\mathbf{x}^*) = 0$. В этом случае полный дифференциал второго порядка $d^2 f(\mathbf{x}^*) = 0$, и тогда разность $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*)$ эквивалентна полному дифференциалу функции $f(\mathbf{x})$ третьего порядка, исследование которого, вообще говоря, намного сложнее. В этом случае вопрос о наличии экстремума в точке \mathbf{x}^* остается открытым и требует дополнительного исследования.

Пример 5.3. Для квадратичной функции (5.3) имеем:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1, 2x_2 \\ 2x_2 - 1, 2x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1, 2 \\ -1, 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимое условие оптимальности первого порядка $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ приводит к системе уравнений: $2x_1 - 1, 2x_2 = 0$, $2x_2 - 1, 2x_1 = 0$. Решая эту систему,

получим стационарную точку $\mathbf{x}^* = (0; 0)^T$. Определитель матрицы Гессе $\nabla^2(\mathbf{x})$ и его главный диагональный минор положительны:

$$\Delta_1(\mathbf{x}^*) = 2 > 0, \quad \Delta_2(\mathbf{x}^*) = \begin{vmatrix} 2 & -1,2 \\ -1,2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 - 1,2^2 = 2,56 > 0.$$

По теореме 5.6 найденная точка \mathbf{x}^* – точка минимума функции (5.3), что совпадает с ранее полученным результатом в примере 5.1.

Пример 5.4. Для функции Розенброка (5.4) получим:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}.$$

Градиент и матрица Гессе функции Розенброка зависят от вектора \mathbf{x} . Необходимое условие экстремума $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ дает систему уравнений: $200x_1(x_2 - x_1^2) = x_1 - 1$, $x_2 = x_1^2$. Решением этой системы найдем стационарную точку $\mathbf{x}^* = (1; 1)^T$, в которой

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы Гессе и его главный минор положительны:

$$\Delta_1(\mathbf{x}^*) = 802 > 0, \quad \Delta_2(\mathbf{x}^*) = 802 \cdot 200 - 400^2 = 400 > 0.$$

Следовательно, \mathbf{x}^* – точка минимума функции (5.4), ранее найденная в примере 5.2.

Метод циклического покоординатного спуска

Этот метод является простейшим численным методом безусловной оптимизации целевой функции n переменных $f(\mathbf{x})$ и основан на одномерной минимизации функции последовательно по каждой из n переменных. Метод заключается в последовательном проведении одномерного поиска в направлениях каждой из n координатных осей. Для этого задаются единичные векторы – орты координатных осей:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T.$$

Вначале проводится одномерный поиск из заданной начальной точки \mathbf{x}_0 в направлении орта \mathbf{e}_1 , и вычисляется точка минимума функции скалярного аргумента $\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_1)$

$$\lambda_1 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_1).$$

Затем определяется следующая точка поиска

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{e}_1.$$

Из точки \mathbf{x}_1 проводится одномерный поиск в направлении орта \mathbf{e}_2 :

$$\lambda_2 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2.$$

Аналогично проводится одномерный поиск в направлениях всех остальных ортов. После n таких одномерных поисков получаем точку

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \lambda_n \mathbf{e}_n.$$

На этом первый цикл метода заканчивается, и переходят к следующему циклу. При этом из точки \mathbf{x}_n опять проводится одномерный поиск в направлении орта \mathbf{e}_1 и так далее. Вычисления производятся до тех пор, пока расстояние между лучшими точками последовательных циклов поиска не превысит заданной допустимой погрешности ε .

Алгоритм метода покоординатного спуска.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска; $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции; ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Положить $n = \dim \mathbf{x}$.
2. Положить $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $i = 1$.
3. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{e}_i)$.
4. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + r \cdot \mathbf{e}_i$.
5. Если $i < n$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 3.
6. Если $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
7. Остановиться.

В этом алгоритме шаги 3–5 производят последовательный одномерный поиск в направлениях ортов осей координат. Шаги 2–6 составляют итерационный цикл метода. Одномерный поиск обычно проводится комбинированным алгоритмом, включающим алгоритм метода Свенна для нахождения интервала неопределенности, содержащего минимум, и один из алгоритмов уменьшения этого интервала. Уменьшение интервала проводится до тех пор, пока точность вычисления параметра λ не превысит заданного малого числа ε_1 . Приведенный алгоритм прост в реализации, но эффективен лишь в случаях, когда целевая функция является *сепарабельной*, то есть представляет собой сумму функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной.

Пример 5.5. На рис. 5.6 представлена траектория поиска минимума квадратичной функции (5.3) методом циклического покоординатного спуска, включающая все точки поиска. Начальная точка $\mathbf{x}_0 = (4; 1)^T$ отмечена кругом, конечная точка указана ромбом. Лучшие точки итераций соединены жирной линией. Для нахождения точки минимума $\mathbf{x}^* = (0; 0)^T$ с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 9 итераций с двумя одномерными поисками на каждой итерации. Значения целевой функции были вычислены 76 раз.

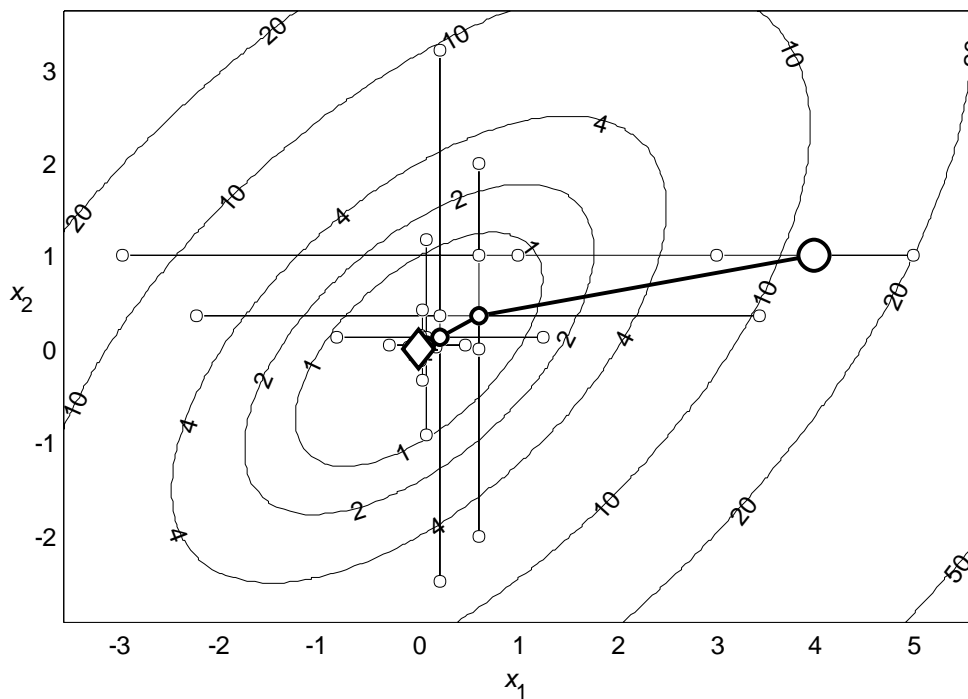


Рис. 5.6. Минимизация квадратичной функции методом циклического покоординатного спуска

Здесь и в последующих вычислительных примерах одномерный поиск при начальном единичном шаге $h_0 = 1$ и допустимой погрешности $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ производится комбинацией метода Свенна и метода квадратичной интерполяции с тремя точками. Погрешность одномерного поиска задана на два порядка выше допустимой погрешности метода многомерной минимизации $\varepsilon = 10^{-3}$. Повышенная точность одномерного поиска используется для сопоставления теоретических свойств методов, обоснованных при условии выполнения точного одномерного поиска, и результатов их численной реализации. Для уменьшения количества вычислений функции и во избежание преждевременного уменьшения шага начальный шаг одномерного поиска задавался как взвешенная сумма двух выполненных предыдущих шагов $h_{k+1} = 0,75 s_k + 0,25 s_{k-1}$, начиная со второй итерации при $s_0 = 1$.

Пример 5.6. На рис. 5.7 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка (5.4) методом циклического покоординатного спуска, включающая лучшие точки итераций. Процесс минимизации занял 355 итераций и прекратился при уменьшении величины шага до 10^{-3} . Было произведено 3164 вычисления функции. Точка минимума, отмеченная звездочкой, не была найдена.

Достоинством метода циклического покоординатного спуска является его простота. Недостатком метода является его неэффективность при минимизации овражных функций. Однако это фундаментальный метод многомерной оптимизации, поскольку идея этого метода о последовательном применении одномерного поиска в n направлениях используется в других более эффективных методах оптимизации.

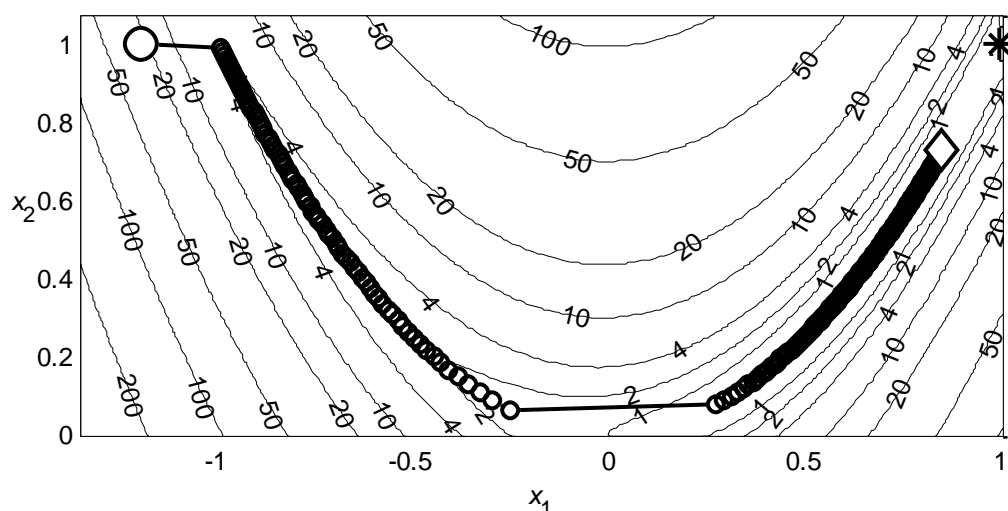


Рис. 5.7. Минимизация функции Розенброка методом покоординатного спуска

Метод циклического покоординатного спуска и его модификации также называют методом циклического покоординатного поиска, циклическим координатным методом, методом Гаусса-Зейделя, методом локальных вариаций.

Методы спуска

С помощью рассмотренного метода циклического покоординатного спуска выполняется одномерный поиск из заданной точки в направлении, параллельном одной из координатных осей, до точки минимума в данном направлении. Затем одномерный поиск производится в направлениях, параллельных другим осям. Все направления поиска в этом методе фиксированы. Целесообразно модифицировать этот метод таким образом, чтобы на каждом этапе одномерный поиск производился вдоль «наилучшего направления», обеспечивающего наиболее быстрое убывание функции. Важной концепцией методов многомерной минимизации является понятие о направлении спуска.

Вектор \mathbf{d} называется *направлением спуска* функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} , если существует такое $\delta > 0$, что $f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) < f(\mathbf{x})$ для всех $\lambda \in (0, \delta)$.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и задан вектор $\mathbf{d} \in R^n$. Тогда производная функции в точке \mathbf{x} по направлению \mathbf{d} определяется как предел

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{d}) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) - f(\mathbf{x})}{\lambda} = \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}. \quad (5.12)$$

В частности, если $f'(\mathbf{x}; \mathbf{d}) < 0$, то \mathbf{d} является направлением спуска. Поэтому на основании (5.12) используют еще одно определение.

Пусть $f(\mathbf{x})$ – дифференцируемая функция при $\mathbf{x} \in R^n$. Если существует вектор $\mathbf{d} \in R^n$, такой что $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} < 0$, то \mathbf{d} называется *направлением спуска* функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} .

Действительно, при помощи формулы Тейлора

$$f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} + o(\lambda)$$

легко видеть, что существует $\delta > 0$, такое, что $f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) < f(\mathbf{x})$ для всех $\lambda \in (0, \delta)$, если и только если \mathbf{d} является направлением спуска функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} , то есть $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} < 0$.

Методы многомерной минимизации функций, в которых используются направления спуска, называются *методами спуска*.

Методы спуска являются итерационными методами. Для выполнения первой итерации задается начальная точка \mathbf{x}_0 . Итерации выполняются по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad (5.13)$$

где k – номер итерации, $k = 0, 1, 2, \dots$; λ_k – скалярное значение, определяющее шаг поиска; \mathbf{d}_k – направление спуска. Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится критерий окончания процесса минимизации

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq \varepsilon, \quad (5.14)$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$.

Во всех методах спуска используется формула (5.13). Различные методы спуска отличаются выбором направления спуска \mathbf{d}_k и способом определения шага поиска λ_k .

Во многих методах шаг поиска λ_k вычисляется как такое значение переменной λ , которое доставляет минимум функции одной переменной $\varphi_k(\lambda) = f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$. Используя необходимое условие минимума дифференцируемой функции скалярного аргумента, получим, что в точке минимума λ_k должно выполняться равенство $\varphi'_k(\lambda_k) = 0$. Но это означает, что равна нулю производная (5.12) функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_{k+1} по направлению \mathbf{d}_k

$$\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})^T \mathbf{d}_k = 0. \quad (5.15)$$

Это необходимое условие точного одномерного поиска. Таким образом, в методах спуска с применением точного одномерного поиска градиент функции в конечной точке итерации \mathbf{x}_{k+1} ортогонален направлению поиска \mathbf{d}_k в этой итерации (рис. 5.8).

Итерация метода спуска (5.13) с проведением точного одномерного поиска представляется в виде:

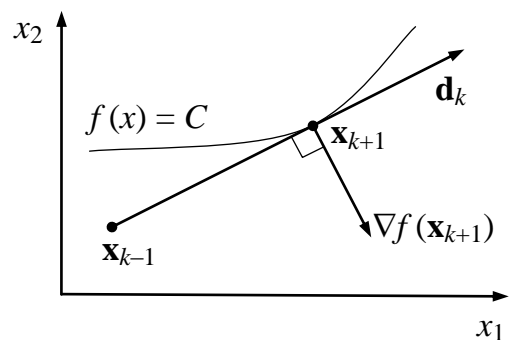


Рис. 5.8. Точный одномерный поиск

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k). \quad (5.16)$$

Эти формулы будут использоваться в последующих численных методах многомерной безусловной минимизации, представленных в данном пособии и отличающихся лишь выбором направления спуска. Любой метод спуска можно описать общим алгоритмом, основанным на формулах (5.16), (5.14).

Алгоритм метода спуска.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить направление спуска \mathbf{d} в точке \mathbf{x} .

2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.

4. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.

5. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 2 выполняется одномерный поиск минимума из текущей точки поиска в направлении спуска \mathbf{d} . Для повышения эффективности одномерного поиска производят масштабирование направления поиска и используют вектор направления $\mathbf{d}^0 = \mathbf{d}/\|\mathbf{d}\|$ единичной длины. Шаг перехода в следующую точку поиска обозначен через вектор \mathbf{s} . Итерации продолжаются, пока длина \mathbf{s} больше заданной допустимой погрешности.

Метод наискорейшего спуска

Для обоснования одного из простейших методов спуска представим дифференцируемую целевую функцию $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in R^n$, рядом Тейлора, ограничиваясь слагаемым первого порядка малости,

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|). \quad (5.17)$$

Пусть \mathbf{x} – фиксированная начальная точка поиска, $\Delta \mathbf{x}$ – приращение аргумента, которое обеспечивает убывание функции, причем длина этого приращения $|\Delta \mathbf{x}|$ постоянна. При достаточно малых значениях $\Delta \mathbf{x}$, пре-

небрегая в (5.17) слагаемыми высшего порядка малости, имеем изменение функции

$$\Delta f = f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x}. \quad (5.18)$$

В первом приближении изменение функции (5.18) равно скалярному произведению векторов $\nabla f(\mathbf{x})$ и $\Delta \mathbf{x}$. Пусть θ – угол между этими векторами. Тогда

$$\Delta f = |\nabla f(\mathbf{x})| \cdot |\Delta \mathbf{x}| \cdot \cos \theta.$$

При постоянной длине векторов $\nabla f(\mathbf{x})$ и $\Delta \mathbf{x}$ убывание функции будет наибольшим, если $\cos \theta = -1$ и $\theta = \pi$. Это означает, что векторы $\nabla f(\mathbf{x})$ и $\Delta \mathbf{x}$ противоположно направлены и $\Delta \mathbf{x} = -\lambda \nabla f(\mathbf{x})$, где $\lambda > 0$. Таким образом, направление наиболее быстрого убывания функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} совпадает с *антиградиентом* $-\nabla f(\mathbf{x})$.

Направление антиградиента $-\nabla f(\mathbf{x})$ наиболее быстрого убывания функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} называется *направлением наискорейшего спуска*. Градиент же функции $\nabla f(\mathbf{x})$ определяет направление наиболее быстрого возрастания функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} .

Пусть $\Delta \mathbf{x}$ – такой малый шаг вдоль линии уровня $f(\mathbf{x}) = C$, что $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = C$. Тогда $\Delta f = f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0$, и по формуле (5.18) с точностью до бесконечно малых первого порядка $\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} = 0$. То есть в любой точке \mathbf{x} направление градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ перпендикулярно линии уровня, проходящей через эту точку, поскольку вдоль этой линии функция постоянна (рис. 5.8). Это замечание касается и антиградиента $-\nabla f(\mathbf{x})$.

Метод минимизации целевой функции $f(\mathbf{x})$, в котором направление поиска определяется антиградиентом $-\nabla f(\mathbf{x})$, называется *методом наискорейшего спуска*. Это означает, что если на некотором шаге процесса оптимизации получена точка \mathbf{x}_k , то поиск минимума функции осуществляется вдоль направления $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$. В данном методе итерации выполняются по формуле (1.13)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad (5.19)$$

где λ_k – значение переменной λ , которое доставляет минимум функции $\phi(\lambda) = f(\mathbf{x}_k - \lambda \nabla f(\mathbf{x}_k))$. Обозначая $\mathbf{g}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$ и учитывая (5.19), запишем формулы итерации метода наискорейшего спуска:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k - \lambda \mathbf{g}_k). \quad (5.20)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$. По формулам (5.20) составим алгоритм метода наискорейшего спуска.

Алгоритм метода наискорейшего спуска.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$.
2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} - \lambda \cdot \mathbf{g})$, $\mathbf{s} = -r \cdot \mathbf{g}$.
3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
4. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.
5. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 2 выполняется одномерный поиск минимума из текущей точки поиска в направлении антиградиента $-\mathbf{g}$. Для повышения эффективности численной процедуры одномерного поиска производят масштабирование направления поиска и используют вектор направления $\mathbf{d}^0 = -\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ единичной длины. Шаг перехода в следующую точку поиска обозначен через \mathbf{s} . Итерации продолжаются, пока длина \mathbf{s} больше заданной допустимой погрешности.

Пример 5.7. На рис. 5.9 представлена траектория минимизации квадратичной функции (5.3) методом наискорейшего спуска, состоящая из лучших точек итераций. Градиент вычислялся по формулам конечных разностей. В соответствии с замечаниями примера 5.5 о проведении одномерного поиска начальное значение шага одномерного поиска на каждой итерации вычисляется на основании двух выполненных предыдущих итераций, а вектор направления поиска масштабирован по формуле $\mathbf{d}^0 = -\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$. Для нахождения точки минимума с погрешностью 10^{-3} затрачено 13 итераций и 80 вычислений функции.

При выполнении точного одномерного поиска из точки \mathbf{x}_k в направлении вектора \mathbf{d}_k по (5.15) получим $\mathbf{d}_k^T \mathbf{g}_{k+1} = 0$, то есть вектор направления ортогонален градиенту функции в точке минимума этой функции в данном направлении. Для метода наискорейшего спуска это означает, что $\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_{k+1} = 0$, то есть градиенты в последовательных точках поиска ортогональны. Следовательно, траектория метода состоит из последовательности ортогональных отрезков $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots$, где $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ — шаг перехода из точки \mathbf{x}_k в точку \mathbf{x}_{k+1} (рис. 5.9).

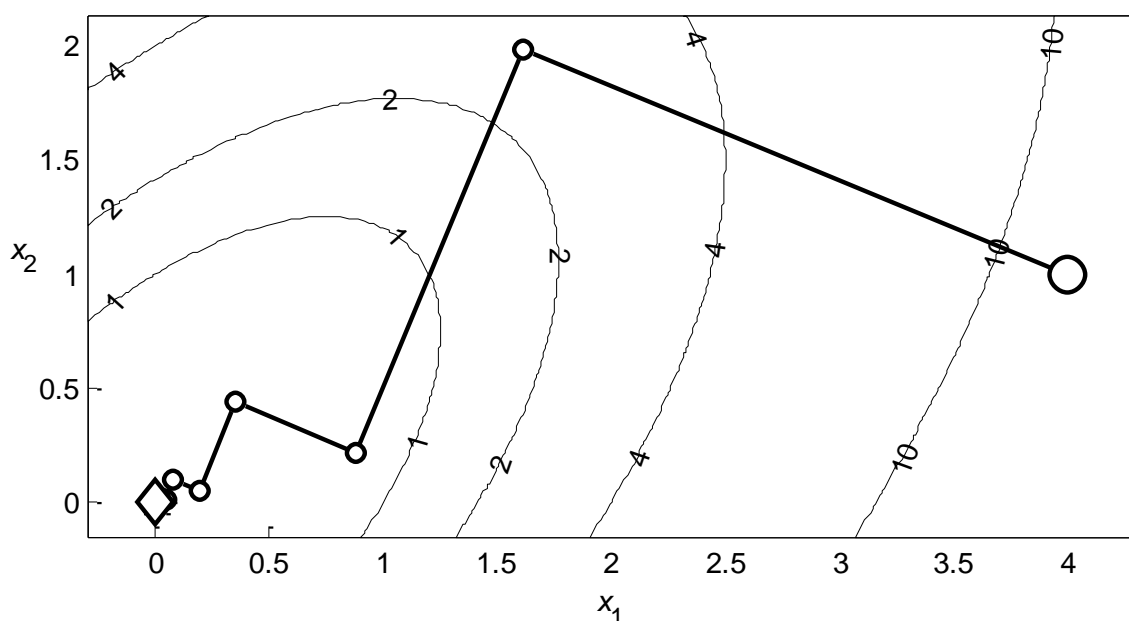


Рис. 5.9. Минимизация квадратичной функции методом наискорейшего спуска

Пример 5.8. На рис. 5.10 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом наискорейшего спуска. Процесс минимизации занял 306 итераций при 2060 вычислениях функции и прекратился при уменьшении величины шага многомерного поиска ниже значения 10^{-3} . Точка минимума не была найдена.

Метод наискорейшего спуска называется также *методом Коши*, поскольку известный французский математик Огюстен Луи Коши первым в 1847 году представил этот метод для решения систем линейных уравнений.

Метод наискорейшего спуска является простейшим, наиболее известным и самым фундаментальным методом безусловной минимизации дифференцируемых функций нескольких переменных. Поскольку в нем используется отрицательный градиент как направление спуска, он также называется *градиентным методом*. Этот метод основан на первых производных целевой функции, поэтому он является методом первого порядка. Достоинством метода является его простота, но он обладает тем же основным недостатком, что и метод циклического покоординатного спуска, — низкой эффективностью при минимизации овражных функций (рис. 5.10).

Метод Коши, как правило, позволяет существенно уменьшить значение целевой функции при движении из начальных точек, расположенных на значительных расстояниях от точки минимума, и поэтому часто используется как начальная процедура в других методах минимизации. Разработаны различные модификации метода Коши. Однако существуют методы минимизации, которые основаны на других принципах и существенно превосходят метод Коши в эффективности.

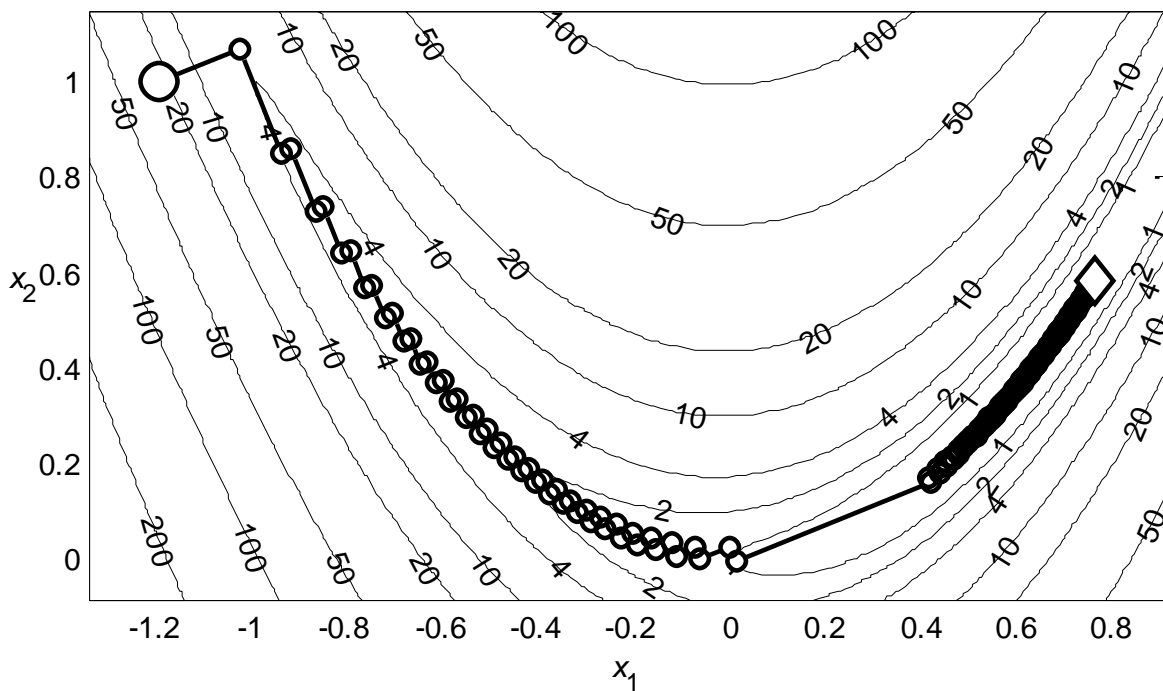


Рис. 5.10. Минимизация функции Розенброка методом наискорейшего спуска

Вычисление градиента

В методе наискорейшего спуска и в других методах оптимизации первого порядка для вычисления направления поиска используется градиент целевой функции $f(\mathbf{x})$. Во многих прикладных задачах оптимизации получение аналитического выражения для градиента затруднительно. Если значения целевой функции определяются с помощью некоторого алгоритма или в результате имитационного моделирования, то аналитическое выражение градиента вообще невозможно представить. Кроме того, аналитическое дифференцирование сложных функций трудоемко и не исключает возникновения ошибок. Целесообразно иметь возможность численного определения градиента целевой функции.

Простейшей формулой вычисления проекций градиента $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ является конечная разность вперёд:

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{\delta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.21)$$

где δ – некоторое малое приращение, \mathbf{e}_i – орт i -той оси координат. Такая аппроксимация градиента непосредственно основана на определении частной производной функции многих переменных и при достаточно малых значениях δ может давать весьма точные оценки. Погрешность формулы (5.21) составляет $o(\delta)$, поэтому чем меньше δ , тем точнее вычислялись бы проекции антиградиента, если бы вычисления проводились с абсолютной точностью. В пределе при стремлении δ к нулю аппроксимация становится точной, однако это не может служить рекомендацией по выбору δ при машинных вычислениях.

Так как машинные вычисления обладают погрешностями представления вещественных чисел и округлений при вычислениях, то величина δ ограничивается снизу точностью машинных вычислений. Обычно эта точность определяется с помощью *машинного эпсилон* ε_m .

Машинное эпсилон ε_m – это наименьшее положительное число, для которого при машинном сложении чисел выполняется неравенство

$$1 + \varepsilon_m > 1.$$

Например, в компьютерной математической системе MATLAB ε_m задаётся с помощью встроенной константы $\text{eps} \approx 2 \cdot 10^{-16}$.

Выбор δ в формуле (5.21) должен осуществляться в зависимости от точности представления чисел в вычислительной системе, координат точки \mathbf{x} и вида функции $f(\mathbf{x})$. Величина δ должна выбираться достаточно большой, чтобы при погрешностях машинных вычислений в формуле (5.21) было $\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$. Для решения большинства задач оптимизации достаточно положить в формуле (5.21) параметр $\delta = 10^{-8}$. По формуле разности вперед (5.21) составлен алгоритм вычисления градиента.

Алгоритм вычисления градиента.

Входные параметры: \mathbf{x} и $f_{\mathbf{x}}$ – точка, в которой вычисляется градиент, и значение в ней функции; $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления целевой функции; δ – параметр приращения аргумента.

Выходной параметр \mathbf{g} – значение градиента.

1. Положить $n = \dim \mathbf{x}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $a = 1/\delta$, $i = 1$.
2. Положить $y_i = y_i + \delta$.
3. Вычислить $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$, $g_i = a \cdot (f_{\mathbf{y}} - f_{\mathbf{x}})$.
4. Положить $y_i = x_i$.
5. Если $i < n$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 2.
6. Остановиться.

По формуле разности вперед (5.21) при известном значении функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} для вычисления градиента требуется n дополнительных вычислений функции.

С помощью центральных разностей значения проекций градиента вычисляются по формуле:

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_i)}{2\delta}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.22)$$

Погрешность этой формулы составляет $o(\delta^2)$. Однако эта формула требует $2n$ дополнительных вычислений значений целевой функции. Поэтому в численных методах оптимизации первого порядка применяется формула конечной разности вперед (5.21), требующая меньшего числа вычислений функции. Для примеров 1.7 и 1.8 с методом наискорейшего спуска использовалась формула (5.21). Формула же центральных разностей (5.22) применяется в методах второго порядка.

5.2. Метод Ньютона и его модификации

Основная идея метода Ньютона заключается в итеративном использовании квадратичной аппроксимации целевой функции в текущей точке поиска и минимизации этой аппроксимации. Разложим дважды дифференцируемую целевую функцию $f(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора в фиксированной точке \mathbf{x} при произвольном приращении аргумента $\Delta\mathbf{x}$, ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости,

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x} + o(\|\Delta\mathbf{x}\|^2).$$

Пренебрегая слагаемыми выше второго порядка малости и обозначая приращение аргумента $\mathbf{s} = \Delta\mathbf{x}$, градиент $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$, матрицу Гессе $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x})$, получим квадратичную функцию

$$q(\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{s}.$$

Вычислим значение аргумента \mathbf{s} , которое минимизирует эту функцию. Используя формулы векторного дифференцирования

$$\nabla(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = \mathbf{a}, \quad \nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2\mathbf{A} \mathbf{x},$$

запишем градиент квадратичной функции

$$\nabla q(\mathbf{s}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{s}.$$

Учитывая необходимое условие минимума $\nabla q(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{s} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (5.23)$$

Решая эту систему относительно вектора \mathbf{s} , найдем вектор перемещения в точку минимума квадратичной функции

$$\mathbf{s} = -\mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (5.24)$$

Метод минимизации функции, основанный на формулах (5.23) или (5.24), называется *методом Ньютона*. Формулы (5.23) и (5.24) можно представить в виде:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = -\nabla f(\mathbf{x}), \quad \Delta\mathbf{x} = -\nabla^2 f(\mathbf{x})^{-1}\nabla f(\mathbf{x}).$$

Метод Ньютона минимизирует положительно определенную квадратичную функцию за один шаг из любой начальной точки \mathbf{x}_0

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0 - \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x}_0).$$

В случае же минимизации функции общего вида метод Ньютона применяется итерационно. Обозначая в текущей точке поиска \mathbf{x}_k значения градиента $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ и матрицы Гессе $\mathbf{H}_k = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$, получим на основании равенства (5.23) итерационные формулы метода Ньютона для номеров итераций $k = 0, 1, 2, \dots$ из произвольной начальной точки поиска \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k, \quad \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k = -\mathbf{g}_k. \quad (5.25)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$. По формулам (5.25) составим алгоритм метода Ньютона.

Алгоритм метода Ньютона.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$.
2. Решить СЛАУ $\mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{g}$.
3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
4. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.
5. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 2 решается система линейных алгебраических уравнений одним из стандартных методов используемой вычислительной системы. Например, в системе MATLAB СЛАУ решается оператором $\mathbf{s} = -\mathbf{H}/\mathbf{g}$. Здесь применяется формула (5.23) метода Ньютона. На шаге 2 возможно применение и формулы (5.24), в которой используется обратная матрица Гессе

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k. \quad (5.26)$$

Однако обращение матрицы в формуле (5.26) требует выполнения гораздо большего количества операций, чем решение СЛАУ в (5.25).

Пример 5.9. На рис. 5.11 представлена траектория поиска минимума квадратичной функции (5.3) методом Ньютона. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 3 итерации и выполнил 19 вычислений функции. Поскольку определение матрицы Гессе в начальной точке поиска и решение СЛАУ (5.23) выполняется с вычислительными погрешностями, то на первой итерации найдено приближение точки минимума с погрешностью $5,3 \cdot 10^{-3}$. На последующих двух итерациях положение точки минимума уточнено и достигнута конечная погрешность $7,3 \cdot 10^{-23}$. Сравнивая эти результаты с результатами примеров 5.5 и 5.7, можно убедиться в преимуществе метода Ньютона перед методами циклического покоординатного спуска и наискорейшего спуска при минимизации квадратичной целевой функции.

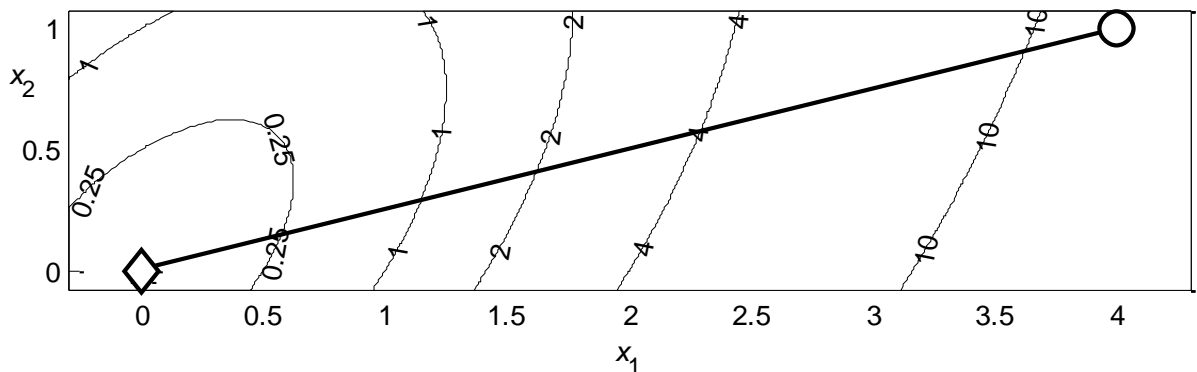


Рис. 5.11. Минимизация квадратичной функции методом Ньютона

Пример 5.10. На рис. 5.12 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом Ньютона. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 9 итераций и выполнил 55 вычислений функции. Сопоставление этих результатов с результатами примеров 5.6 и 5.8 также подтверждает преимущество метода Ньютона по сравнению с методами циклического покоординатного спуска и наискорейшего спуска.

В отличие от формул (5.20) метода наискорейшего спуска, в которых антиградиент $-\mathbf{g}_k$ задает только направление поиска, в формулах (5.25)

метода Ньютона вектор \mathbf{s}_k задает и направление, и шаг перехода в следующую точку поиска.

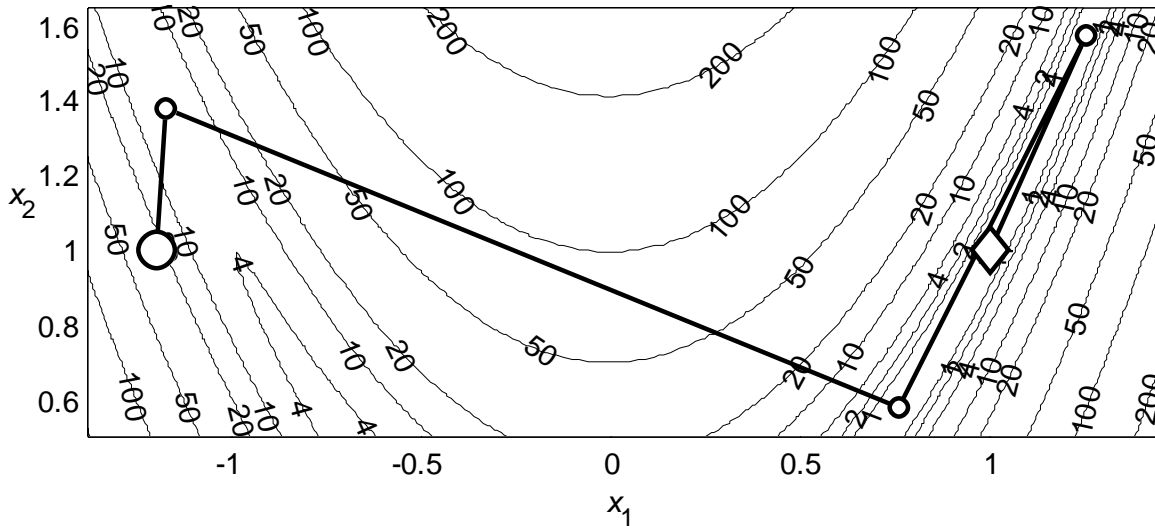


Рис. 5.12. Минимизация функции Розенброка методом Ньютона

Умножая равенство (5.24) скалярно на градиент $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, получим:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{s} = -\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Если матрица Гессе $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ положительно определенная, то и обратная к ней матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}$ также положительно определенная. В этом случае $\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{s} < 0$ и вектор \mathbf{s} определяет направление спуска. Если же матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ отрицательно определенная, то вектор \mathbf{s} определяет направление возрастания функции. В этом случае вектор \mathbf{s} приводит в точку максимума квадратичной функции. Условию $\nabla q(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$ отвечает также седловая точка. Поэтому одним из недостатков метода Ньютона является возможное возрастание значений функции $f(\mathbf{x}_{k+1}) > f(\mathbf{x}_k)$ и расходимость метода для функции общего вида. Другим недостатком является использование матрицы вторых частных производных, требующее дополнительных вычислений.

Метод Ньютона также называют *методом Ньютона – Рафсона*. Так как он использует вторые производные целевой функции, это метод второго порядка.

Метод Ньютона с одномерным поиском

При минимизации произвольной целевой функции $f(\mathbf{x})$ формулы метода Ньютона (5.25), основанные на аппроксимации функции квадратичной функцией в малой окрестности текущей точки поиска, могут приводить к возрастанию значений функции. Для повышения надежности метода Ньютона и обеспечения убывания значений целевой функции применяется одномерная минимизация функции в направлении поиска \mathbf{s} , найденном по формулам (5.23) или (5.24). На каждой итерации такого модифицированного метода Ньютона из точки \mathbf{x}_k выполняется одномерный поиск в направлении метода Ньютона $\mathbf{d}_k = \mathbf{s}_k$

$$\lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k).$$

Таким образом, получим формулы метода Ньютона с одномерным поиском:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{H}_k \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k). \quad (5.27)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$. По формулам (5.27) составим алгоритм метода Ньютона с одномерным поиском.

Алгоритм метода Ньютона с одномерным поиском.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$.
2. Решить СЛАУ $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{g}$.
3. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.
4. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
5. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.
6. Остановиться.

По сравнению с предыдущим алгоритмом в этом алгоритме добавлен шаг 3, на котором выполняется одномерный поиск. Шаг перехода в следующую точку поиска обозначен через s . Итерации продолжаются, пока норма s больше допустимой погрешности.

Пример 5.11. Для нахождения точки минимума квадратичной функции (5.3) с допустимой погрешностью 10^{-3} метод Ньютона с одномерным поиском использовал 3 итерации и выполнил 28 вычислений функции. Траектория поиска минимума этим методом такая же, как и на рис. 5.11. На первой итерации найдено приближение точки минимума с погрешностью $4,8 \cdot 10^{-3}$. На последующих двух итерациях лучшие точки итераций приблизились к точке минимума и достигнутая конечная погрешность составила $7,2 \cdot 10^{-17}$.

Пример 5.12. На рис. 5.13 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом Ньютона с одномерным поиском. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 12 итераций и выполнил 260 вычислений функции.

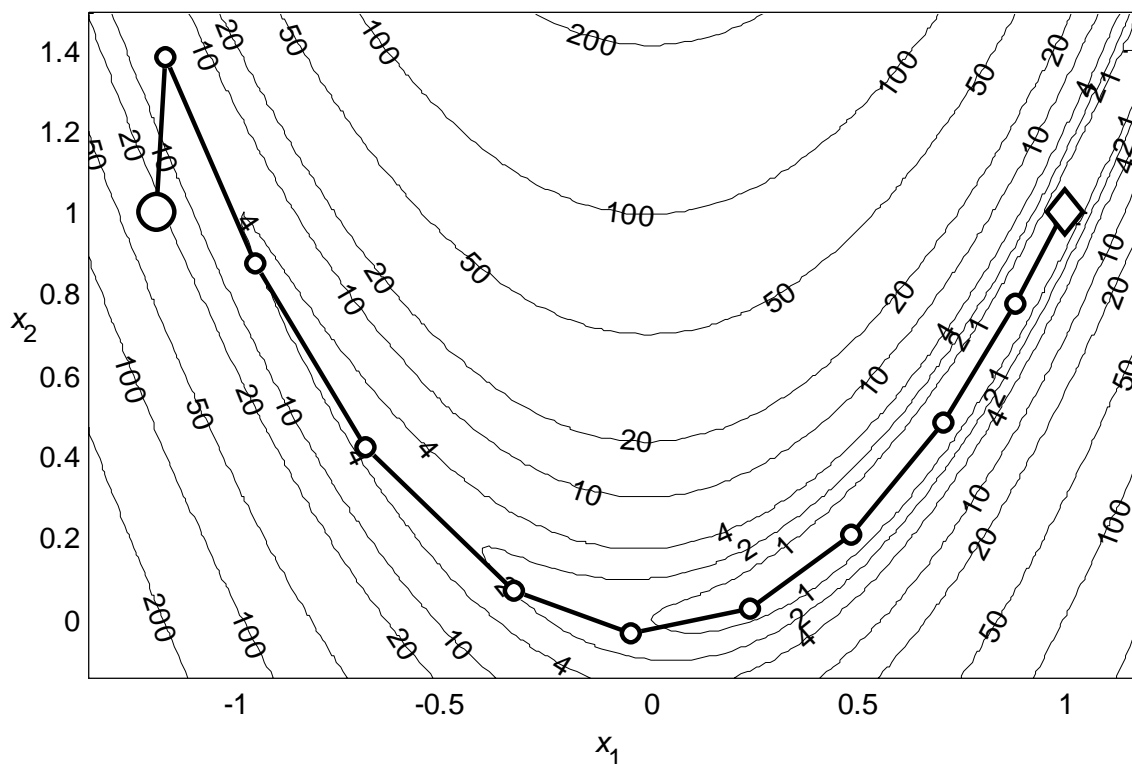


Рис. 5.13. Минимизация функции Розенброка методом Ньютона с одномерным поиском

Метод Ньютона с одномерным поиском надежнее исходного метода Ньютона. Однако его эффективность существенно зависит от того, является ли направление поиска направлением спуска.

Метод Ньютона с направлением спуска

Для повышения эффективности метода Ньютона необходимо обеспечить такое направление одномерного поиска, которое гарантированно приводит к убыванию функции, то есть является направлением спуска. Два распространенных случая, в которых метод Ньютона приводит к ошибочным направлениям, связаны с точками максимума целевой функции и седловыми точками. В этих и других случаях необходимо проверять, является ли направление \mathbf{s}_k метода Ньютона направлением спуска. Если \mathbf{s}_k – направление спуска, то для него $\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k < 0$, то есть скалярное произведение вектора направления \mathbf{s}_k из точки \mathbf{x}_k и вектора градиента в этой точке $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ отрицательно. В геометрическом смысле это означает, что векторы \mathbf{s}_k и \mathbf{g}_k образуют тупой угол θ . Действительно, если $\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k = |\mathbf{s}_k| \cdot |\mathbf{g}_k| \cdot \cos \theta$, то из неравенства $\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k < 0$ следует $\cos \theta < 0$, то есть $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

Если условие $\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k < 0$ не выполняется, то вектор \mathbf{s}_k не является направлением спуска. В этом случае для задания направления спуска целесообразно использовать антиградиент $-\mathbf{g}_k$. Таким образом, направление спуска в модифицированном методе Ньютона можно задать формулами:

$$\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k = -\mathbf{g}_k; \quad \mathbf{d}_k = \begin{cases} \mathbf{s}_k, & \mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k < 0; \\ -\mathbf{g}_k, & \mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k \geq 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Вычислительные эксперименты показывают, что для функции общего вида наибольшее уменьшение значений функции на первой итерации обеспечивается в направлении наискорейшего спуска. Поэтому первую итерацию модифицированного метода Ньютона из заданной начальной точки \mathbf{x}_0 целесообразно проводить в направлении антиградиента $-\mathbf{g}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$ с использованием одномерного поиска:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0). \quad (5.29)$$

Последующие итерации проводятся по формулам:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad (5.30)$$

где направление поиска \mathbf{d}_k определяется формулой (5.28). Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$. По формулам (5.28)–(5.30) составим алгоритм метода Ньютона с направлением спуска.

Алгоритм метода Ньютона с направлением спуска.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x})$.
2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.
3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
4. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$.
5. Решить СЛАУ $\mathbf{H} \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{g}$.
6. Если $\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{g} < 0$, то положить $\mathbf{d} = \mathbf{s}$, иначе положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}$.
7. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.
8. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
9. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 4.
10. Остановиться.

По сравнению с предыдущим алгоритмом метода Ньютона в этом алгоритме добавлены шаги 1–3, на которых выполняется начальный одномерный поиск в направлении антиградиента, и шаг 6, на котором задается направление спуска.

Пример 5.13. На рис. 5.14 показана траектория минимизации квадратичной функции (1.3) модифицированным методом Ньютона с направлением спуска. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод использовал 3 итерации и выполнил 26 вычислений функции.

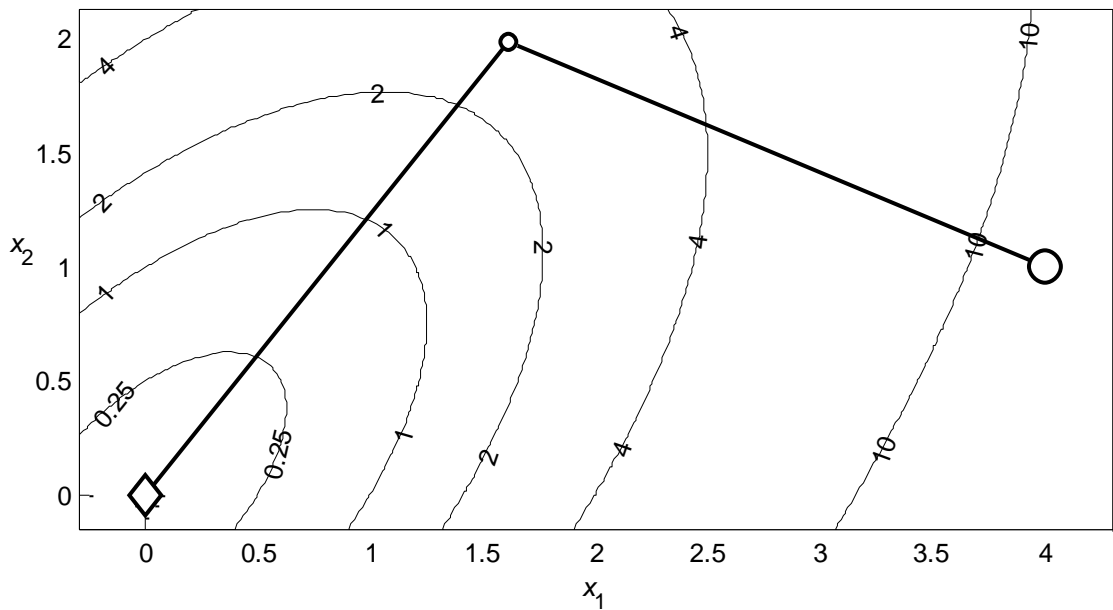


Рис. 5.14. Минимизация квадратичной функции методом Ньютона с направлением спуска

Пример 5.14. На рис. 5.15 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом Ньютона с направлением спуска. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 12 итераций и 307 вычислений функции.

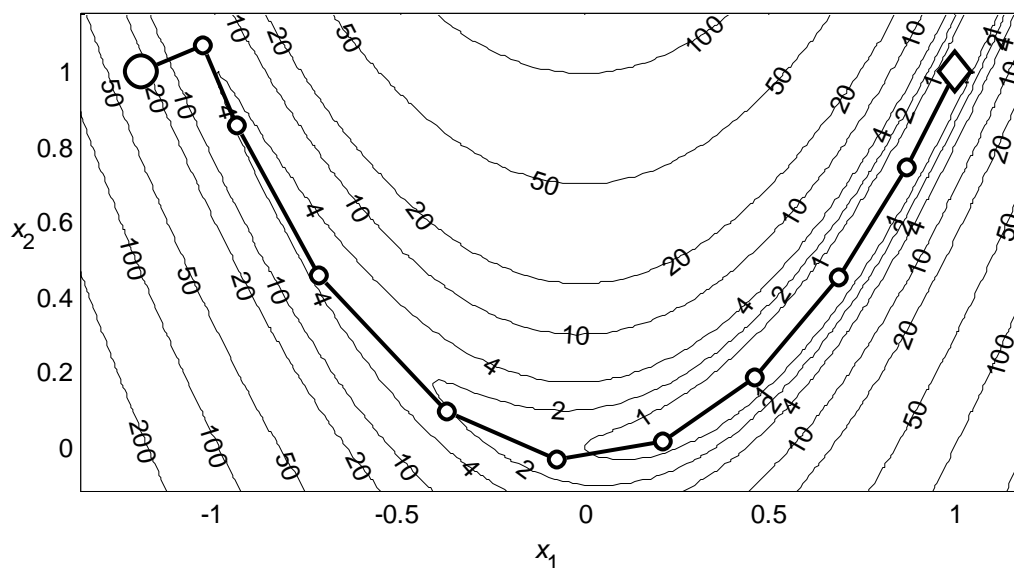


Рис. 5.15. Минимизация функции Розенброка методом Ньютона с направлением спуска

Метод Ньютона с одномерным поиском и заданием направления спуска надежнее предыдущих вариантов метода Ньютона.

Метод Марквардта

Этот метод является комбинацией методов наискорейшего спуска и Ньютона. Выше было отмечено, что движение в направлении антиградиента из начальной точки поиска \mathbf{x}_0 , расположенной на значительном расстоянии от точки минимума \mathbf{x}^* , обычно приводит к существенному уменьшению целевой функции. С другой стороны, направления эффективного поиска в окрестности точки минимума определяются по методу Ньютона.

Идея объединения методов наискорейшего спуска и Ньютона представлена американским математиком Д. Марквардтом в 1963 г. Он вместо формулы метода Ньютона (5.23) использовал формулу

$$[\mathbf{H}(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{E}] \mathbf{s} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (5.31)$$

где α – скалярный параметр, \mathbf{E} – единичная матрица той же размерности, что и $\mathbf{H}(\mathbf{x})$. При большом значении α матрицей $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ в левой части уравнения (5.31) можно пренебречь, тогда получим уравнение $\alpha \mathbf{E} \mathbf{s} = -\mathbf{g}(\mathbf{x})$. В этом случае направление вектора $\mathbf{s} = -\mathbf{g}(\mathbf{x})/\alpha$ совпадает с антиградиентом, то есть направлением наискорейшего спуска. Если же $\alpha \rightarrow 0$, то в уравнении (5.31) можно пренебречь слагаемым $\alpha \mathbf{E}$. Тогда (5.31) превращается в (5.23) и \mathbf{s} становится шагом метода Ньютона. При промежуточном значении α направление вектора \mathbf{s} , удовлетворяющего (5.31), лежит между направлением антиградиента и направлением метода Ньютона. На этом свойстве уравнения (5.31) и основан метод Марквардта.

Начальное значение α_0 выбирается достаточно большим, $\alpha_0 \gg 1$, а затем в процессе поиска α_k уменьшается посредством умножения на коэффициент $\beta \in (0; 1)$. Таким образом, на начальных этапах выполняются шаги метода наискорейшего спуска $\mathbf{s}_k = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)/\alpha_k$, а на конечных этапах используется шаг метода Ньютона. Формулы метода Марквардта можно представить в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k, \quad (\mathbf{H}_k + \alpha_k \mathbf{E}) \mathbf{s}_k = -\mathbf{g}_k, \quad \alpha_k = \alpha_{k-1} \beta. \quad (5.32)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε — допустимая погрешность. Параметр метода Марквардта α_k позволяет не только изменять направление поиска, но и регулировать длину шага. Если шаг слишком большой и $f(\mathbf{x}_{k+1}) \geq f(\mathbf{x}_k)$, то полагают $\alpha_k = \alpha_k / \beta$ и опять применяют формулы (5.32) уже с меньшим шагом \mathbf{s}_k .

Формула Марквардта (5.31) позволяет устранить ещё один недостаток метода Ньютона, который связан с возможной плохой обусловленностью СЛАУ (5.23). *Плохо обусловленной* называется система уравнений, в которой малые погрешности исходных данных вызывают большие погрешности решения. *Числом обусловленности* матрицы \mathbf{H} называется произведение норм этой и обратной к ней матриц

$$\text{cond } \mathbf{H} = \|\mathbf{H}\| \cdot \|\mathbf{H}^{-1}\|.$$

Для единичной матрицы \mathbf{E} число обусловленности $\text{cond } \mathbf{E} = 1$, а для произвольной матрицы \mathbf{H} $\text{cond } \mathbf{H} \geq 1$. Чем больше число обусловленности матрицы, тем хуже обусловлена соответствующая СЛАУ. В частности, матрица \mathbf{H} может быть вырожденной, и тогда СЛАУ (5.23) не имеет решения в отличие от системы (5.31).

В точках поиска, далёких от минимума, матрица Гессе \mathbf{H} является, как правило, плохо обусловленной матрицей, но в этих точках для метода Марквардта $\alpha \gg 1$, поэтому $\mathbf{H} + \alpha \mathbf{E} \approx \alpha \mathbf{E}$, а, значит

$$\text{cond } (\mathbf{H} + \alpha \mathbf{E}) \approx \text{cond } (\alpha \mathbf{E}) = \|\alpha \mathbf{E}\| \cdot \|(\alpha \mathbf{E})^{-1}\| = \alpha \cdot 1 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot 1 = 1.$$

Поэтому в методе Марквардта СЛАУ (5.31), определяющая направления поиска, хорошо обусловлена. Кроме того, поскольку единичная матрица \mathbf{E} положительно определена, то это свойство выполняется и для матрицы СЛАУ (5.31), так что найденное путем решения этой системы направление является направлением спуска.

По формулам (5.32) составим алгоритм метода Марквардта.

Алгоритм метода Марквардта.

Входные параметры: \mathbf{x} — начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ — процедура вычисления функции, α_0 и β — параметры метода, ε — допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $f_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$.
2. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$ и положить $\alpha = \alpha_0$.
3. Решить СЛАУ $(\mathbf{H} + \alpha \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{g}$.
4. Вычислить $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$.
5. Если $f_{\mathbf{y}} \geq f_{\mathbf{x}}$, то положить $\alpha = \alpha/\beta$ и перейти к шагу 3.
6. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $f_{\mathbf{x}} = f_{\mathbf{y}}$, $\alpha_0 = \alpha_0 \cdot \beta$.
7. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
8. Остановиться.

В этом алгоритме можно положить $\alpha_0 = 100$, $\beta = 0,5$. Алгоритм метода Марквардта характеризуется относительной простотой, свойством убывания значений целевой функции при переходе от итерации к итерации, высокой скоростью сходимости в окрестности точки минимума \mathbf{x}^* , а также отсутствием процедуры одномерного поиска.

Пример 5.15. На рис. 5.16 показана траектория минимизации квадратичной функции (5.3) методом Марквардта со всеми точками поиска. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод использовал 13 итераций и 79 вычислений функции.

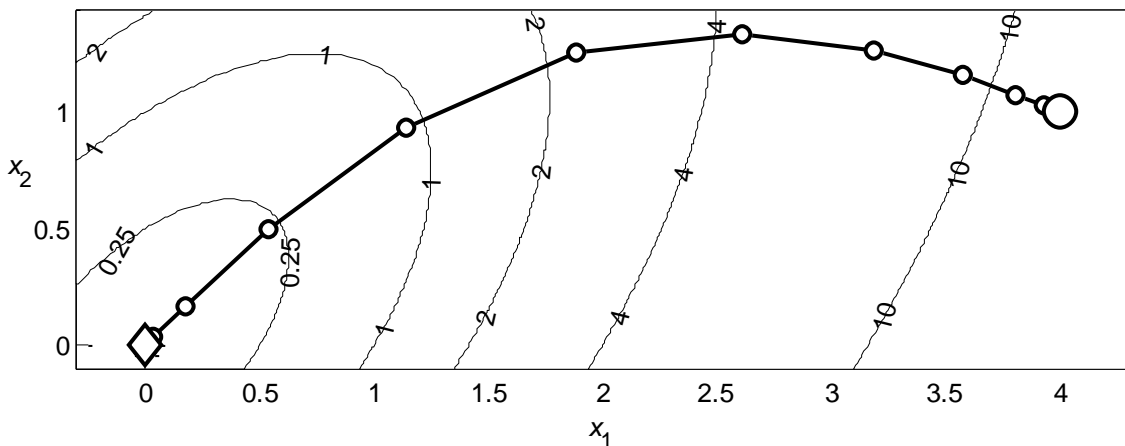


Рис. 5.16. Минимизация квадратичной функции методом Марквардта

Пример 5.16. На рис. 5.17 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом Марквардта со всеми точками поиска. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод использовал 21 итерацию и 151 вычисление функции.

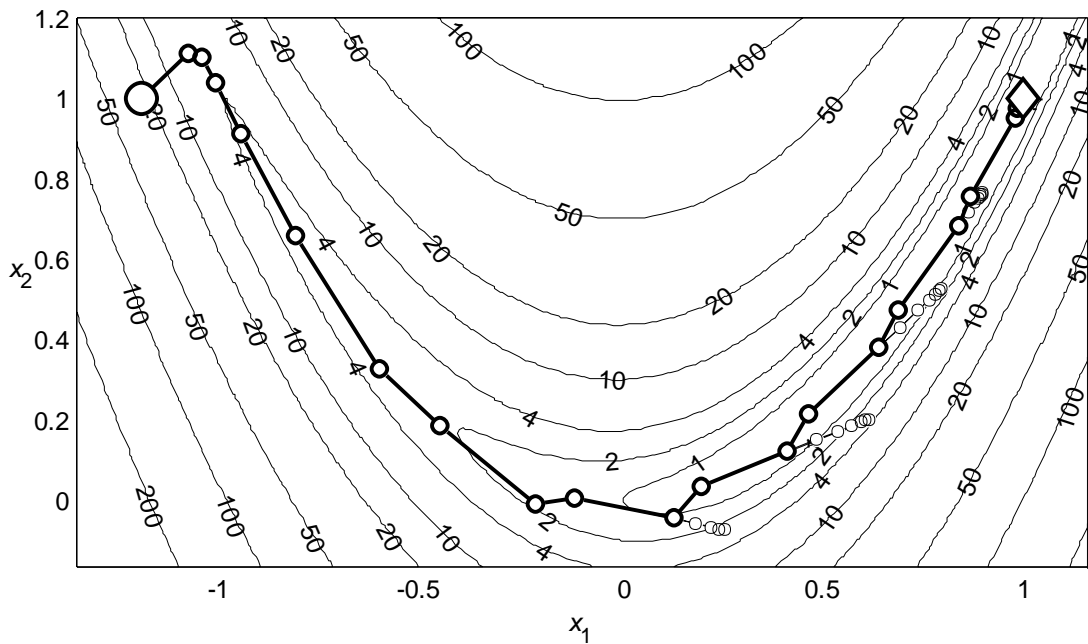


Рис. 5.17. Минимизация функции Розенброка методом Марквардта

В некоторых случаях применение одномерного поиска позволяет повысить надежность метода Марквардта. В методе Марквардта с одномерным поиском применяются формулы:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad (5.33)$$

$$(\mathbf{H}_k + \alpha_k \mathbf{E}) \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k, \quad \alpha_k = \alpha_{k-1} \beta. \quad (5.34)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность. По формулам (5.33) и (5.34) составим алгоритм метода Марквардта с одномерным поиском.

Алгоритм метода Марквардта с одномерным поиском.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, α и β – параметры метода, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$.

2. Решить СЛАУ $(\mathbf{H} + \alpha \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{g}$.

3. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.

4. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\alpha = \alpha \cdot \beta$.

5. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.

6. Остановиться.

В этом алгоритме можно положить $\alpha = 10^3$, $\beta = 0,5$.

Пример 5.17. На рис. 5.18 представлена траектория поиска минимума квадратичной функции (5.3) методом Марквардта с одномерным поиском. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 11 итераций и 101 вычисление функции. Сравнивая результаты этого примера с результатами примера 5.7 для метода наискорейшего спуска, отметим уменьшение числа итераций за счет более эффективного направления поиска на завершающих итерациях из-за увеличения количества вычислений функции, связанного с нахождением матрицы Гессе. Траектории поиска на рис. 5.7 и рис. 5.18 выглядят одинаково, так как на начальных итерациях метода Марквардта преобладает направление наискорейшего спуска. Для квадратичных функций метод Марквардта использовать нецелесообразно.

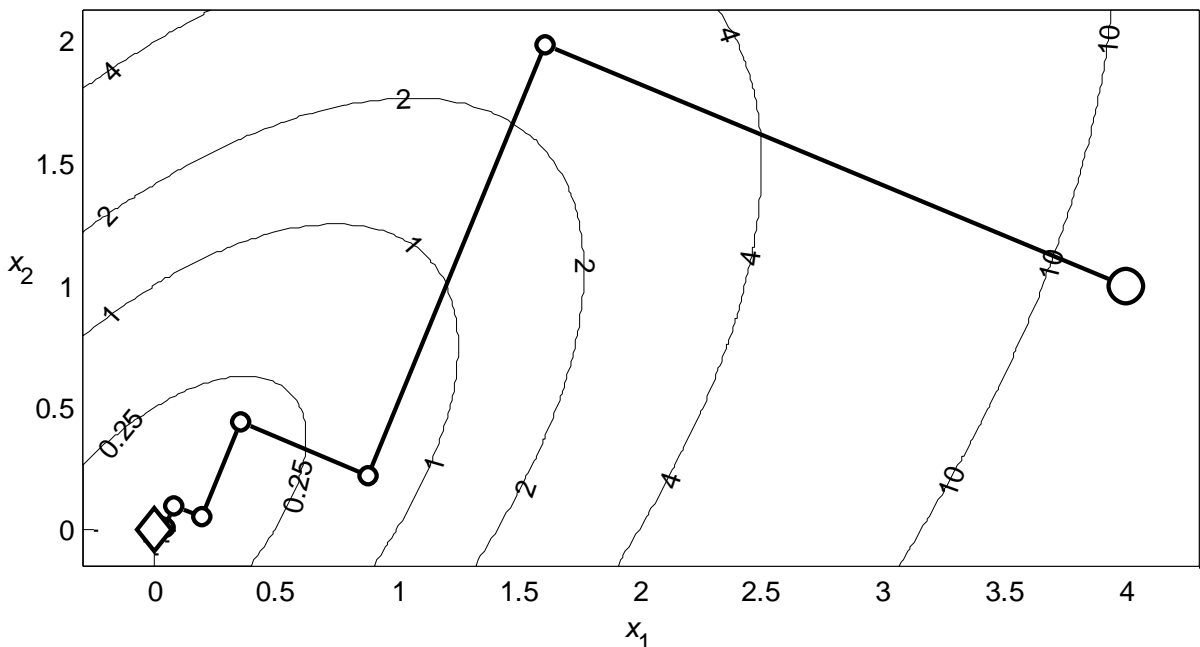


Рис. 5.18. Минимизация квадратичной функции методом Марквардта с одномерным поиском

Пример 5.17. На рис. 5.19 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом Марквардта с одномерным поиском. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод использовал 15 итераций и 398 вычислений функции. Здесь количество вычислений функции также оказалось больше, чем для всех предыдущих вариантов метода Ньютона.

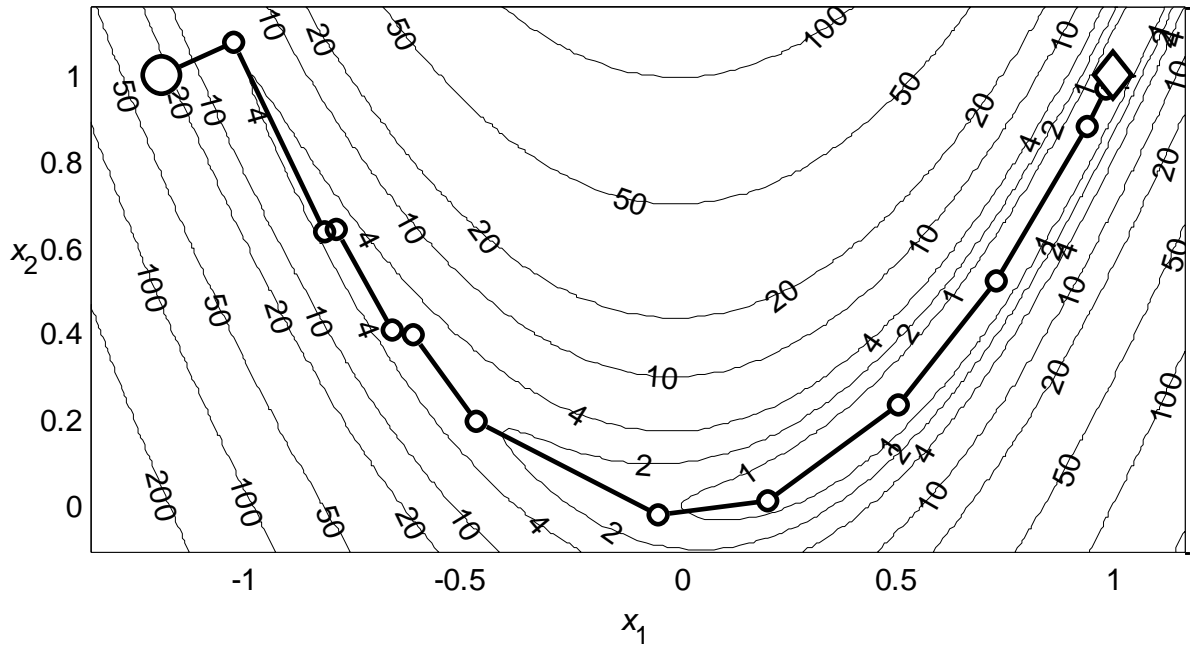


Рис. 5.19. Минимизация функции Розенброка методом Марквардта с одномерным поиском

Метод Марквардта широко используется при решении задач, в которых целевая функция записывается в виде суммы квадратов. Именно такая задача и рассматривалась Марквардтом. Метод Марквардта также называется *методом Левенберга – Марквардта*.

Вычисление матрицы Гессе

Для минимизации дважды дифференцируемой целевой функции $f(\mathbf{x})$, зависящей от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , все варианты метода Ньютона, которые являются методами второго порядка, используют матрицу Гессе вторых частных производных

$$\nabla^2(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

По теореме Шварца

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Поэтому матрица Гессе является симметрической матрицей, для которой симметричные относительно главной диагонали элементы совпадают: $H_{ij}(\mathbf{x}) = H_{ji}(\mathbf{x})$. В силу этого свойства при транспонировании матрица Гессе не изменяется $\mathbf{H}(\mathbf{x})^T = \mathbf{H}(\mathbf{x})$.

Во многих задачах оптимизации, которые встречаются на практике, целевые функции представляются сложными выражениями или вычисляются алгоритмически, поэтому матрица Гессе в методах второго порядка определяется численно с помощью конечных разностей.

Для вычисления матрицы Гессе целевую функцию $f(\mathbf{x})$ разложим в ряд Тейлора, учитывая слагаемые второго порядка малости:

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|^2).$$

Вначале рассмотрим квадратичную функцию двух переменных при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$f(\Delta \mathbf{x}) = c_0 + (c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta x_1 \quad \Delta x_2) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Для такой функции

$$\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \nabla f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу симметричности матрицы Гессе $c_{12} = c_{21}$. Поэтому функция (5.35) имеет шесть неизвестных параметров: $c_0, c_1, c_2, c_{11}, c_{12}, c_{22}$. Эти параметры вычислим по шести значениям функции в различных ее точках (рис. 5.20). Положим $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \delta$, зададим точки $(0, 0), (\delta, 0), (-\delta, 0), (0, \delta), (0, -\delta), (\delta, \delta)$ и вычислим значения функции в этих точках: $f(0, 0), f(\delta, 0), f(-\delta, 0), f(0, \delta), f(0, -\delta), f(\delta, \delta)$. Подставляя эти значения в уравнение (5.35), получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую имеем:

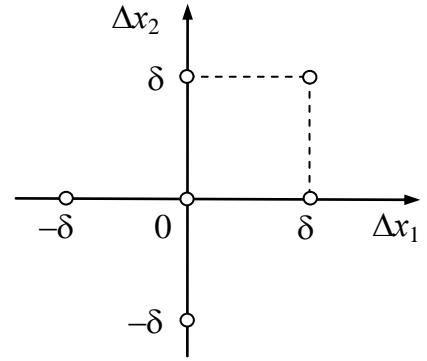


Рис. 5.20. Точки для вычислений

$$c_0 = f(0, 0), \quad c_1 = \frac{f(\delta, 0) - f(-\delta, 0)}{2\delta}, \quad c_2 = \frac{f(0, \delta) - f(0, -\delta)}{2\delta},$$

$$c_{11} = \frac{f(\delta, 0) - 2f(0, 0) + f(-\delta, 0)}{\delta^2}, \quad c_{22} = \frac{f(0, \delta) - 2f(0, 0) + f(0, -\delta)}{\delta^2},$$

$$c_{12} = \frac{f(\delta, \delta) - f(\delta, 0) - f(0, \delta) + f(0, 0)}{\delta^2}.$$

Полученные для квадратичной функции (5.35) формулы обобщаются для вычисления градиента и матрицы Гессе произвольной функции n переменных с использованием ортов системы координат $\mathbf{e}_i, i = \overline{1, n}$.

Проекции градиента вычислим по формуле центральных разностей (5.22):

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_i)}{2\delta}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.36)$$

Диагональные элементы матрицы Гессе вычисляются по формуле конечной разности второго порядка:

$$H_{ii}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - 2f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_i)}{\delta^2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.37)$$

Недиагональные элементы матрицы Гессе вычислим по формуле

$$H_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) + f(\mathbf{x})}{\delta^2}, \quad (5.38)$$

где $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$.

Формулы (5.36)–(5.38) кроме значения целевой функции в точке \mathbf{x} требуют $n(n+3)/2$ дополнительных вычислений значений функции. При этом точность вычисления градиента и матрицы Гессе существенно зависит от величины приращения аргумента δ , которую связывают со значением машинного эпсилон ε_m . Обычно полагают $\delta \geq 10^8 \varepsilon_m$. По формулам (5.36)–(5.38) составлен алгоритм вычисления градиента и матрицы Гессе для функции многих переменных.

Алгоритм вычисления градиента и матрицы Гессе.

Входные параметры: \mathbf{x} и $f_{\mathbf{x}}$ – точка, в которой вычисляется градиент, и значение в ней функции; $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления целевой функции; δ – параметр приращения аргумента.

Выходные параметры: \mathbf{g} – градиент, \mathbf{H} – матрица Гессе.

1. Положить $n = \dim \mathbf{x}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, $a = 1/(2\delta)$, $b = 1/\delta^2$, $i = 1$.
2. Вычислить $y_i = x_i + \delta$, $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$, $z_i = x_i - \delta$, $f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z})$.
3. Вычислить $g_i = a \cdot (f_{\mathbf{y}} - f_{\mathbf{z}})$, $H_{ii} = b \cdot (f_{\mathbf{y}} - 2 \cdot f_{\mathbf{x}} + f_{\mathbf{z}})$.
4. Положить $y_i = x_i$, $z_i = x_i$, $F_i = f_{\mathbf{y}}$.
5. Если $i < n$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 2.
6. Положить $i = 1$.
7. Положить $y_i = x_i + \delta$, $j = i + 1$.
8. Вычислить $y_j = x_j + \delta$, $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$, $H_{ij} = b \cdot (f_{\mathbf{y}} - F_i - F_j + f_{\mathbf{x}})$.
9. Положить $H_{ji} = H_{ij}$, $y_j = x_j$.
10. Если $j < n$, то положить $j = j + 1$ и перейти к шагу 8.
11. Положить $y_i = x_i$.
12. Если $i < n - 1$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 7.
13. Остановиться.

В этом алгоритме на шагах 2–5 вычисляются градиент и диагональные элементы матрицы Гессе, а на шагах 6–12 вычисляются недиагональные элементы матрицы Гессе. В примерах 5.23–5.32 градиент и матрица Гессе вычислены по приведенному алгоритму со значением параметра $\delta = 10^{-6}$.

5.3. Методы сопряженных направлений

Свойства квадратичной функции

Рассмотрим положительно определенную квадратичную функцию

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c, \quad (5.39)$$

где \mathbf{x} – вектор-столбец переменных размера n , \mathbf{A} – симметрическая и положительно определенная квадратная матрица размерности $n \times n$, \mathbf{b} – вектор-столбец размера n , c – скаляр,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (5.40)$$

При этом все собственные значения матрицы \mathbf{A} положительны и $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Градиент функции (5.39) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ имеет вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (5.41)$$

Дифференцируя это равенство, получим матрицу Гессе квадратичной функции $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$. Из (5.41) следует, что для произвольного приращения аргумента квадратичной функции $\Delta \mathbf{x}$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) + \mathbf{b}.$$

Вычитая из этого равенства равенство (5.41), получим

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}.$$

Обозначая $\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})$, это свойство приращения градиента квадратичной функции запишем в виде

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}. \quad (5.42)$$

Пусть \mathbf{x}^* – точка минимума квадратичной функции (5.39), и по необходимому условию минимума $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Тогда по свойству (5.42) получим $\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$, то есть

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*). \quad (5.43)$$

Поскольку положительно определенная квадратичная функция является строго выпуклой, то необходимое условие минимума $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ для нее является одновременно и достаточным, поэтому для точки минимума \mathbf{x}^* из (5.41) получим уравнение $\mathbf{Ax}^* = -\mathbf{b}$, откуда

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

При этом значении аргумента функция (5.39) принимает минимальное значение

$$f^* = f(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c = \frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c,$$

то есть

$$f^* = c - \frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Пусть поиск минимума функции (5.39) проводится по итерационной схеме метода спуска

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad (5.44)$$

где λ_k вычисляется путем точной одномерной минимизации функции $\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$ по параметру λ из точки \mathbf{x}_k в направлении вектора \mathbf{d}_k . Поскольку $\varphi'(\lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k$, то при $\lambda = \lambda_k$ и $\varphi'(\lambda_k) = 0$ получим $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k = 0$, то есть $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1})^T \mathbf{d}_k = 0$. Обозначим $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$. Условие точного одномерного поиска принимает вид условия ортогональности

$$\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{d}_k = 0. \quad (5.45)$$

По формуле (5.42)

$$\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k), \quad (5.46)$$

С учетом формулы (5.44) $\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k = \mathbf{A}\lambda_k \mathbf{d}_k$, то есть

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k + \lambda_k \mathbf{A} \mathbf{d}_k. \quad (5.47)$$

Теперь условие ортогональности (5.45) дает $(\mathbf{g}_k + \lambda_k \mathbf{A} \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k = 0$, откуда $\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k = 0$. Поскольку в силу положительной определенности матрицы \mathbf{A} и ее свойства (5.40) $\mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k > 0$, то

$$\lambda_k = -\frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k}. \quad (5.48)$$

Это и есть условие точного одномерного поиска для квадратичной функции. Формулы (5.40)–(5.48) представляют важные свойства квадратичной функции (5.39), которые используются при построении эффективных методов оптимизации.

Сопряжённые векторы и их свойства

В эффективных методах оптимизации используется понятие сопряженных направлений.

Пусть \mathbf{A} – симметрическая и положительно определенная матрица размерности $n \times n$.

Определение 5.1. *Ненулевые векторы $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ пространства R^n при $k < n$ называются \mathbf{A} -сопряженными или просто сопряженными, если для них*

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (5.49)$$

Если матрица \mathbf{A} равна единичной матрице \mathbf{E} , то $\mathbf{E} \mathbf{d}_j = \mathbf{d}_j$ и условие сопряженности принимает вид $\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_j = 0$. Это означает, что скалярное произведение векторов равно нулю. В этом случае условие сопряженности векторов эквивалентно условию их ортогональности $\mathbf{d}_i \perp \mathbf{d}_j$. В частности, собственные векторы матрицы \mathbf{A} являются сопряженными.

Лемма 3.1. *Если векторы $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ \mathbf{A} -сопряженные, то они линейно независимы.*

Доказательство. Составим линейную комбинацию векторов и приравняем ее нулю

$$\alpha_0 \mathbf{d}_0 + \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{d}_k = \mathbf{0}. \quad (5.50)$$

Транспонируем это равенство и умножим его справа на $\mathbf{A} \mathbf{d}_i$, где \mathbf{d}_i – произвольный вектор из данной системы векторов. В силу определения сопряженности (5.49) k слагаемых левой части обращаются в нуль, и в результате имеем

$$\alpha_i \mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_i = 0.$$

По свойству (5.40) положительно определенной квадратичной функции $\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_i > 0$, поэтому $\alpha_i = 0$. Итак, равенство (5.50) может выполняться только при нулевых значениях коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, откуда и следует линейная независимость сопряженных векторов. \square

Количество сопряженных векторов не может быть больше, чем n .

Следствие 5.1. *Сопряженные векторы $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}$ образуют базис в пространстве R^n .*

Любой вектор пространства R^n можно разложить по базису из сопряженных векторов. Для положительно определенной квадратичной функции эффективный поиск минимума можно проводить в сопряженных направлениях. Это утверждение основано на свойствах сопряженных направлений.

Теорема 5.7. *Пусть \mathbf{d} – некоторое направление поиска в пространстве R^n , а \mathbf{u} и \mathbf{v} – две различные точки минимума квадратичной функции $f(\mathbf{x})$, полученные из двух точек \mathbf{u}_0 и \mathbf{v}_0 в направлении \mathbf{d} . Тогда направление $\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ сопряжено к направлению \mathbf{d} .*

Доказательство. Если \mathbf{u} и \mathbf{v} – точки минимума квадратичной функции $f(\mathbf{x})$, полученные из двух точек \mathbf{u}_0 и \mathbf{v}_0 в направлении \mathbf{d} , то по свойству (5.45) точного одномерного поиска для квадратичной функции выполняются условия ортогональности:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{d}^T \mathbf{g}(\mathbf{v}) = 0.$$

Но по формуле (5.41) градиента квадратичной функции

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{b}.$$

Условия ортогональности градиентов направлению \mathbf{d} примут вид:

$$\mathbf{d}^T (\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{d}^T (\mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{b}) = 0.$$

Вычитая эти равенства и используя свойства матриц, получим:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{A} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0.$$

Обозначая $\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, придем к утверждению теоремы. \square

Доказанную теорему называют *свойством параллельного подпространства*. По свойству параллельного подпространства выполнение двух одномерных поисков из разных точек в направлении \mathbf{d} позволяет получить сопряженное к \mathbf{d} направление \mathbf{s} (рис. 5.21). Точка минимума \mathbf{x}^* квадратичной функции $f(\mathbf{x})$ при $n=2$ может быть найдена одномерным поиском из точек \mathbf{u} или \mathbf{v} в направлении \mathbf{s} , то есть в результате проведения трех одномерных поисков.

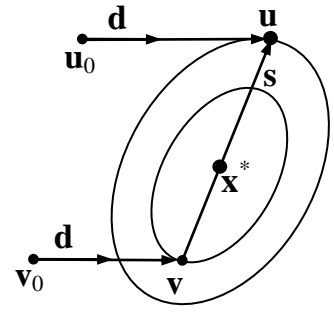


Рис. 5.21. Сопряженные направления

Гладкие овражные функции вблизи дна оврага можно аппроксимировать квадратичными функциями. Поэтому свойства сопряженных направлений позволяют находить эффективные направления поиска для любых гладких функций.

Теорема методов сопряжённых направлений

Методами сопряженных направлений для минимизации квадратичной функции n переменных называются итерационные методы с последовательным одномерным поиском в n сопряженных направлениях.

Теорема 5.8. *Метод сопряженных направлений из любой начальной точки находит минимум положительно определенной квадратичной функции не более чем за n итераций, причем в конечной точке любой итерации градиент ортогонален всем предыдущим направлениям поиска.*

Доказательство. Пусть для матрицы \mathbf{A} квадратичной функции (3.1) известны n сопряженных векторов $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}$. Используем эти векторы как направления в задаче минимизации квадратичной функции из произвольной точки $\mathbf{x}_0 \in R^n$ с помощью n точных одномерных поисков по формулам (5.44) и (5.48) при следующей схеме метода сопряженных направлений:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = -\frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (5.51)$$

Поскольку $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \lambda_{k-1}\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{x}_{k-2} + \lambda_{k-2}\mathbf{d}_{k-2} + \lambda_{k-1}\mathbf{d}_{k-1}$, то, продолжая эти преобразования, получим:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \lambda_j \mathbf{d}_j, \quad i = \overline{0, k-2}. \quad (5.52)$$

Отсюда и по формуле (5.41) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \lambda_j \mathbf{d}_j\right) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{b} + \mathbf{A} \sum_{j=i+1}^{k-1} \lambda_j \mathbf{d}_j, \\ \mathbf{g}_k &= \mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{d}_j. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_k = \mathbf{d}_i^T \left(\mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{d}_j \right) = \mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \lambda_j \mathbf{d}_i^T \mathbf{A}\mathbf{d}_j, \quad i = \overline{0, k-2}.$$

В силу условия точного одномерного поиска (5.45) и определения сопряженных векторов (5.49) имеем $\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_k = 0$ при $i = \overline{0, k-2}$. Поскольку (5.45) можно представить в виде $\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{g}_k = 0$, то для метода сопряженных направлений получим:

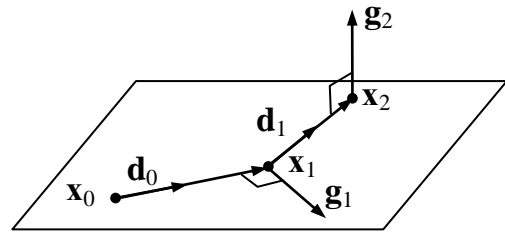
$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_k = 0, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (3.15)$$

Градиент \mathbf{g}_k ортогонален всем векторам направлений $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{k-1}$. Тогда градиент \mathbf{g}_n ортогонален всем векторам сопряженных направлений $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}$. Поскольку эти векторы образуют базис в пространстве R^n , то

$$\mathbf{g}_n = \alpha_0 \mathbf{d}_0 + \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{d}_{n-1}.$$

Умножая это векторное равенство скалярно на вектор \mathbf{g}_n и учитывая условия ортогональности (5.53), получим равенство $\mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n = 0$, откуда следует $\mathbf{g}_n = \mathbf{0}$. По свойству квадратичной функции (5.43) для градиента $\mathbf{g}_n = \mathbf{A}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*)$, то есть имеем $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*$. Тем самым доказано, что метод

сопряженных направлений (5.51) сходится к оптимальному решению задачи минимизации квадратичной функции не более чем за n итераций. \square



Равенства (5.53) показывают, что вектор градиента в конечной точке любой итерации ортогонален всем предыдущим направлениям поиска. Эти равенства отображают *принцип расширяющихся подпространств*, который допускает наглядную геометрическую интерпретацию, представленную на рис. 5.22.

Рис. 5.22. Расширение подпространств

Таким образом, теорема 5.8 утверждает, что если для положительно определенной квадратичной функции n переменных заданы n взаимно сопряженных направлений $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}$, то точка минимума этой функции \mathbf{x}^* может быть найдена из любой начальной точки \mathbf{x}_0 путем последовательного точного одномерного поиска вдоль этих n направлений.

Метод Пауэлла

Один из первых методов сопряжённых направлений представлен английским математиком М. Д. Д. Пауэллом в 1964 году для минимизации функции нескольких переменных $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n$. Этот метод является развитием метода циклического покоординатного спуска, в котором последовательный одномерный поиск производится в направлениях ортов координатных осей $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$. В отличие от метода покоординатного спуска в методе Пауэлла строится система n сопряженных направлений.

Каждая итерация метода Пауэлла начинается с определения n линейно независимых направлений $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$. Первоначально эти направления совпадают с ортами координатных осей: $\mathbf{d}_i = \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Из начальной точки $\mathbf{u}_0 \in R^n$ производится вспомогательный одномерный поиск в последнем направлении \mathbf{d}_n :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_n, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{u}_0 + \lambda \mathbf{d}_n). \quad (5.54)$$

Затем из точки \mathbf{x}_0 выполняется итерация метода покоординатного поиска в виде проведения n последовательных одномерных поисков в направлениях ортов координатных осей:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_{k-1} + \lambda \mathbf{d}_k), \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.55)$$

Последняя точка \mathbf{x}_n получена при минимизации функции из точки \mathbf{x}_{n-1} в направлении \mathbf{d}_n . Таким образом, точки \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_n найдены путем минимизации функции в одном и том же направлении \mathbf{d}_n . В случае квадратичной целевой функции по свойству параллельного подпространства направление $\mathbf{s} = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$ сопряжено к направлению \mathbf{d}_n . Из системы направлений $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ исключается первое направление \mathbf{d}_1 и добавляется новое направление \mathbf{s} . При этом полагают $\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{i+1}$ для $i = \overline{1, n-1}$ и $\mathbf{d}_n = \mathbf{s}$. Для квадратичной функции после окончания первой итерации два последние направления поиска \mathbf{d}_{n-1} и \mathbf{d}_n сопряжены.

В качестве начальной точки для следующей итерации задают $\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}_n$ и проводят следующую итерацию по тем же формулам (5.54) и (5.55). Итерации продолжаются до тех пор, пока норма вектора \mathbf{s} остается больше допустимой погрешности ε .

Таким образом, для квадратичной функции после k итераций метода Пауэлла $k+1$ последние направления поиска $\mathbf{d}_{n-k}, \dots, \mathbf{d}_n$, выбранных для $(k+1)$ -й итерации, будут взаимно сопряженными. После $n-1$ итераций все направления будут взаимно сопряженными, поэтому метод Пауэлла обеспечивает минимизацию квадратичной функции не более чем за n итераций. Так, для минимизации квадратичной функции с двумя переменными $n=2$ и достаточно выполнения двух итераций. При этом точка минимума будет найдена после выполнения четырех одномерных поисков.

Алгоритм метода Пауэлла.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Положить $n = \dim \mathbf{x}$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}(n)$.
2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{D}_n)$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + r \cdot \mathbf{D}_n$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $i = 1$.
4. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{D}_i)$.
5. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + r \cdot \mathbf{D}_i$.
6. Если $i < n$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.
7. Положить $i = 1$.
8. Положить $\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_{i+1}$.
9. Если $i < n - 1$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 8.
10. Вычислить $\mathbf{D}_n = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.
11. Если $\|\mathbf{D}_n\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
12. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 1 формируется матрица направлений поиска \mathbf{D} как единичная матрица \mathbf{E} размера n . Шаги 2–11 составляют итерацию метода Пауэлла. На шаге 2 выполняется одномерный поиск из точки \mathbf{x} в направлении последнего столбца \mathbf{D}_n матрицы \mathbf{D} . На шагах 4–6 производится последовательный одномерный поиск в направлениях всех столбцов матрицы \mathbf{D} . На шагах 7–10 формируется новая матрица направлений исключением первого ее столбца и добавлением последнего столбца. На шаге 11 проверяется критерий окончания вычислений.

Пример 5.17. На рис. 5.23 представлена траектория поиска минимума квадратичной функции (5.3) методом Пауэлла, включающая все точки поиска. Лучшие точки итераций соединены жирной линией. Для вычисления точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 3 итерации, причем значение функции $9,2 \cdot 10^{-33}$ было найдено за две итерации при погрешности вычисления точки минимума $1,2 \cdot 10^{-16}$, а последняя итерация использована для проверки критерия окончания вычислений. Значения целевой функции были вычислены 35 раз. Сравнивая эти результаты с результатами примера 5.5 для минимизации той же функции методом циклического покоординатного спуска, можно убедиться в преимуществе метода Пауэлла.

Пример 5.18. На рис. 5.24 представлена траектория минимизации функции Розенброка методом Пауэлла, включающая лучшие точки итераций. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 12 итераций и 529 вычислений функции.

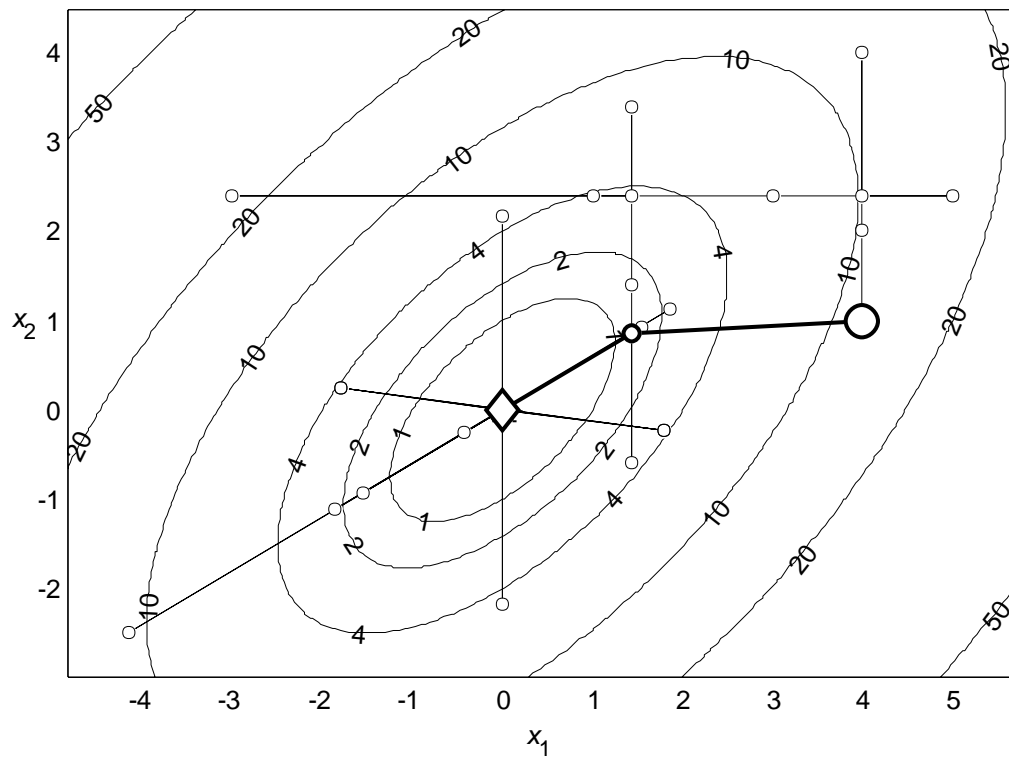


Рис. 5.23. Минимизация квадратичной функции методом Пауэлла

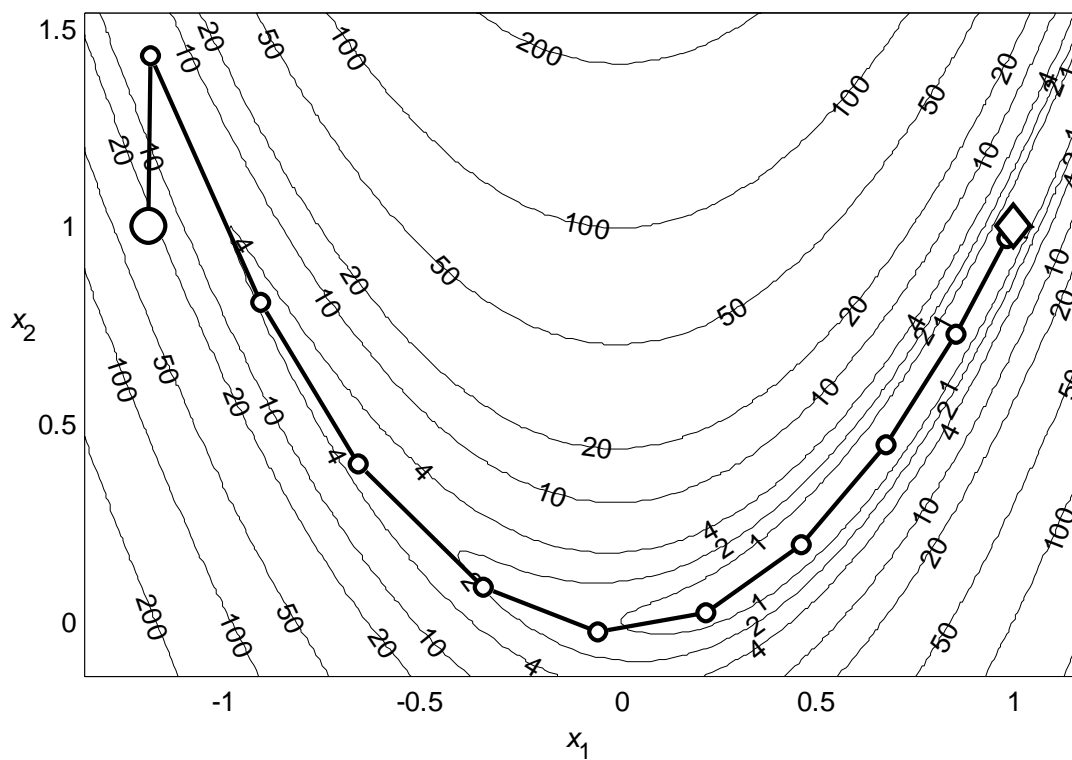


Рис. 5.24. Минимизация функции Розенброка методом Пауэлла

Метод Пауэлла позволяет минимизировать гладкие овражные функции. Его достоинством является отсутствие использования производных функции, поэтому он относится к методам нулевого порядка.

Методы сопряжённых градиентов

В методах сопряженных направлений сопряженные векторы как направления одномерного поиска можно определять разными способами.

Методами сопряженных градиентов для минимизации квадратичной функции $f(\mathbf{x})$ называются методы сопряженных направлений, в которых сопряженные векторы как направления одномерного поиска определяются на основании значений градиента целевой функции $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$.

Рассмотрим общие свойства методов сопряженных градиентов, в которых применяются формулы методов сопряженных направлений (5.51). Справедлива теорема методов сопряженных градиентов, где как и ранее $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$.

Теорема 5.9. *Метод сопряженных градиентов является методом сопряженных направлений (5.51), в котором векторы направлений вычисляются по формулам*

$$\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (5.56)$$

и выполняются свойства

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_i = 0, \quad i = \overline{0, k-1}; \quad \mathbf{d}_k^T \mathbf{g}_k = -\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (5.57)$$

Доказательство. Пусть в методе сопряженных направлений (5.51) начальное направление поиска определяется по антиградиенту $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$ в начальной точке поиска $\mathbf{x}_0 \in R^n$, а последующие направления \mathbf{d}_k вычисляются как сумма антиградиента $-\mathbf{g}_k$ и линейной комбинации предыдущих направлений поиска:

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ki} \mathbf{d}_i, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (5.58)$$

При этом коэффициенты α_{ki} выбирают таким образом, чтобы направления были сопряженными. При таком выборе (5.58) дает:

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_i = \mathbf{g}_k^T \left(-\mathbf{g}_i + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{d}_j \right) = -\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_i + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_j, \quad i = \overline{0, k-1}.$$

Отсюда с учетом (5.53) получим важное свойство методов сопряженных градиентов:

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_i = 0, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (5.59)$$

Тем самым доказана первая группа равенств (5.57).

Умножим равенство (5.59) скалярно на вектор \mathbf{g}_k :

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{g}_k = -\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ki} \mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_k, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

По свойству методов сопряженных направлений (5.53) имеем:

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{g}_k = -\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (5.60)$$

Тем самым доказана вторая группа равенств (5.57).

Для определения коэффициентов α_{ki} в равенстве (5.58) умножим их скалярно на вектор $\mathbf{A} \mathbf{d}_j$ при $j = \overline{0, k-1}$:

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = -\mathbf{g}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ki} \mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

С использованием определения сопряженности (5.49) получим:

$$-\mathbf{g}_k^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j + \alpha_{kj} \mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = 0, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

Умножая это равенство на λ_j и учитывая формулу (5.47) в виде $\lambda_j \mathbf{A} \mathbf{d}_j = \mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j$, имеем:

$$-\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j) + \alpha_{kj} \mathbf{d}_j^T (\mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

Тогда с учетом свойств (5.59) и (5.60) получим:

$$\alpha_{kj} \mathbf{g}_j^T \mathbf{g}_j = 0, \quad j = \overline{0, k-2}; \quad -\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k + \alpha_{kj} \mathbf{g}_j^T \mathbf{g}_j = 0, \quad j = k-1.$$

Отсюда

$$\alpha_{kj} = 0, \quad j = \overline{0, k-2}; \quad \alpha_{k,k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}.$$

Обозначая $\beta_{k-1} = \alpha_{k,k-1}$, для формулы направления (5.58) окончательно имеем:

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (5.61)$$

Равенства (5.56) доказаны. Тем самым доказана теорема 5.9. \square

Для обеспечения сопряженности векторов направлений в методе сопряженных градиентов достаточно учитывать только предыдущий вектор направления. Формула для вычисления β_{k-1} в равенствах (5.61) представлена английскими математиками Р. Флетчером и К. М. Ривсом в 1964 году и называется *формулой Флетчера – Ривса*. Метод сопряженных градиентов обладает всеми свойствами методов сопряженных направлений и минимизирует квадратичную функцию при точном одномерном поиске не более чем за n итераций.

Важной особенностью формул (5.61) является то, что для построения вектора направления \mathbf{d}_k нужны лишь градиенты \mathbf{g}_k и \mathbf{g}_{k-1} в текущей и предыдущей точках соответственно, а также предыдущий вектор направления \mathbf{d}_{k-1} . Это обстоятельство оказывается особенно полезным для применения метода к гладким функциям общего вида.

Метод Флетчера – Ривса

Одним из самых известных методов сопряженных градиентов является *метод Флетчера – Ривса*. Приведем описание этого метода для минимизации произвольной целевой функции $f(\mathbf{x})$.

В методе Флетчера – Ривса направления одномерного поиска определяются на основании градиента целевой функции $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$. Задается начальная точка \mathbf{x}_0 , в ней вычисляется значение градиента $\mathbf{g}_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0)$. В направлении антиградиента производится одномерный поиск и находится следующая точка:

$$\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0). \quad (5.62)$$

Последующие итерации основаны на вычислении градиента $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$, формулах методов спуска (5.16) и методов сопряженных градиентов (5.56):

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k). \quad (5.64)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность.

Вектор \mathbf{d}_k , построенный по формулам (5.63), для квадратичной функции является направлением спуска. Действительно, если $\mathbf{g}_k \neq 0$, то с учетом свойств (5.57) получим:

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k + \beta_{k-1} \mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_{k-1} = -\|\mathbf{g}_k\|^2 < 0.$$

Заметим, что при $\beta_{k-1} = 0$ метод Флетчера – Ривса превращается в метод наискорейшего спуска.

По формулам (5.62)–(5.64) составим алгоритм метода Флетчера – Ривса.

Алгоритм метода Флетчера – Ривса.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$.

2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r\mathbf{d}$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.

4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\beta = \mathbf{g}_x^T \cdot \mathbf{g}_x / (\mathbf{g}_y^T \cdot \mathbf{g}_y)$.

5. Положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x + \beta \cdot \mathbf{d}$.

6. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.

7. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 2 выполняется одномерный поиск точки минимума из текущей точки поиска в направлении \mathbf{d} . Направление поиска вычисляется на шагах 4, 5. Для повышения эффективности одномерного поиска производят масштабирование направления поиска и используют вектор направления $\mathbf{d}^0 = \mathbf{d} / \|\mathbf{d}\|$ единичной длины. Шаг перехода в следующую точку поиска обозначен через \mathbf{s} . Итерации продолжаются, пока длина вектора \mathbf{s} больше заданной допустимой погрешности.

Достоинством метода Флетчера – Ривса является то, что его скорость сходимости значительно превышает скорость сходимости метода наискорейшего спуска. Он требует хранения в памяти малого количества информации в виде нескольких n -мерных векторов. Уменьшить объем памяти можно применением модификации предыдущего алгоритма.

Алгоритм 2 метода Флетчера – Ривса.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $q = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g}$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}$.
2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r\mathbf{d}$.
3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
4. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $p = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g}$, $\beta = p/q$.
5. Положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x + \beta \cdot \mathbf{d}$, $q = p$.
6. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
7. Остановиться.

В отличие от предыдущего алгоритма здесь скалярные произведения градиентов хранятся в скалярных переменных p и q , что не требует дополнительного запоминания n -мерного вектора градиента. При решении реальных задач оптимизации значения градиента целевой функции вычисляется по формуле конечной разности вперед, что требует n добавочных вычислений функции. Относительно невысокий уровень требований к объему памяти компьютера делает метод Флетчера – Ривса особенно полезным при решении задач оптимизации большой размерности.

Пример 5.20. На рис. 5.25 представлена траектория минимизации квадратичной функции (5.3) методом Флетчера – Ривса, включающая

лучшие точки итераций. Для вычисления точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 3 итерации, причем значение функции $1,3 \cdot 10^{-14}$ найдено за две итерации при погрешности вычисления точки минимума $8,8 \cdot 10^{-8}$, а последняя итерация использована для проверки критерия окончания вычислений. Значения функции вычислены 19 раз. При этом траектория минимизации квадратичной функции методом Флетчера – Ривса такая же, как и траектория минимизации этой же функции модифицированным методом Ньютона с направлением спуска из примера 5.13, представленная на рис. 5.14.

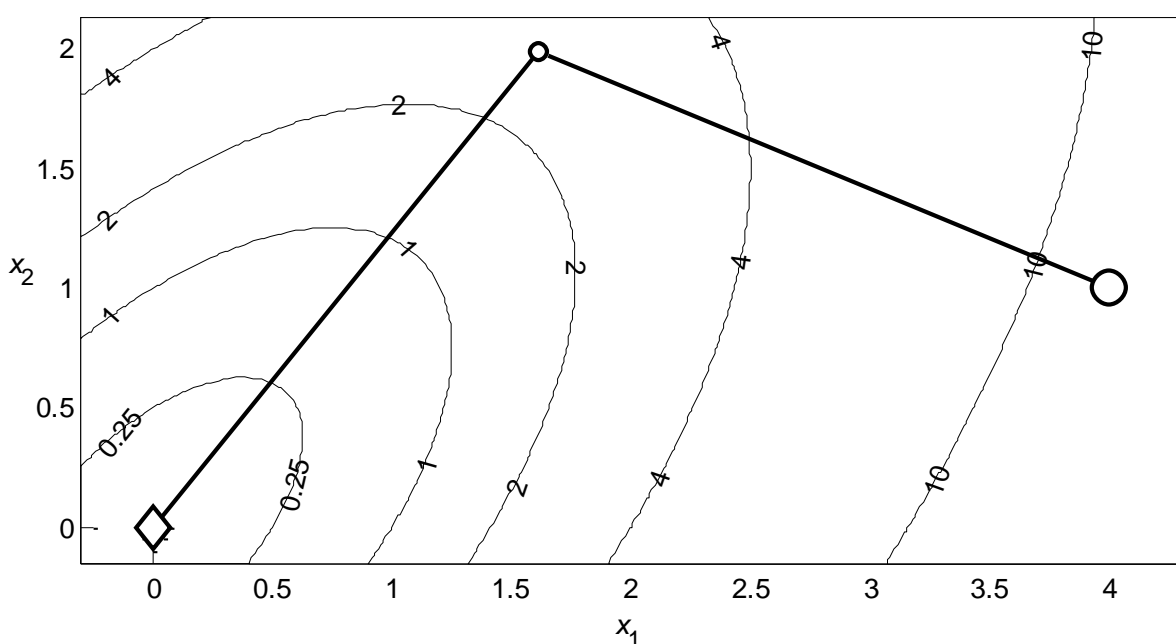


Рис. 5.25. Минимизация квадратичной функции методом Флетчера-Ривса

Пример 5.21. На рис. 5.26 представлена траектория поиска минимума функции Розенброка методом Флетчера – Ривса. До уменьшения шага с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 49 итераций и 461 вычисление функции. Метод проскочил мимо точки минимума, отмеченной звездочкой.

Недостатком метода Флетчера – Ривса является то, что он очень чувствителен к точности одномерного поиска, а также подвержен существенному влиянию ошибок машинных вычислений. При минимизации функций общего вида его эффективность может снижаться из-за нарушения условий сопряженности направлений поиска.

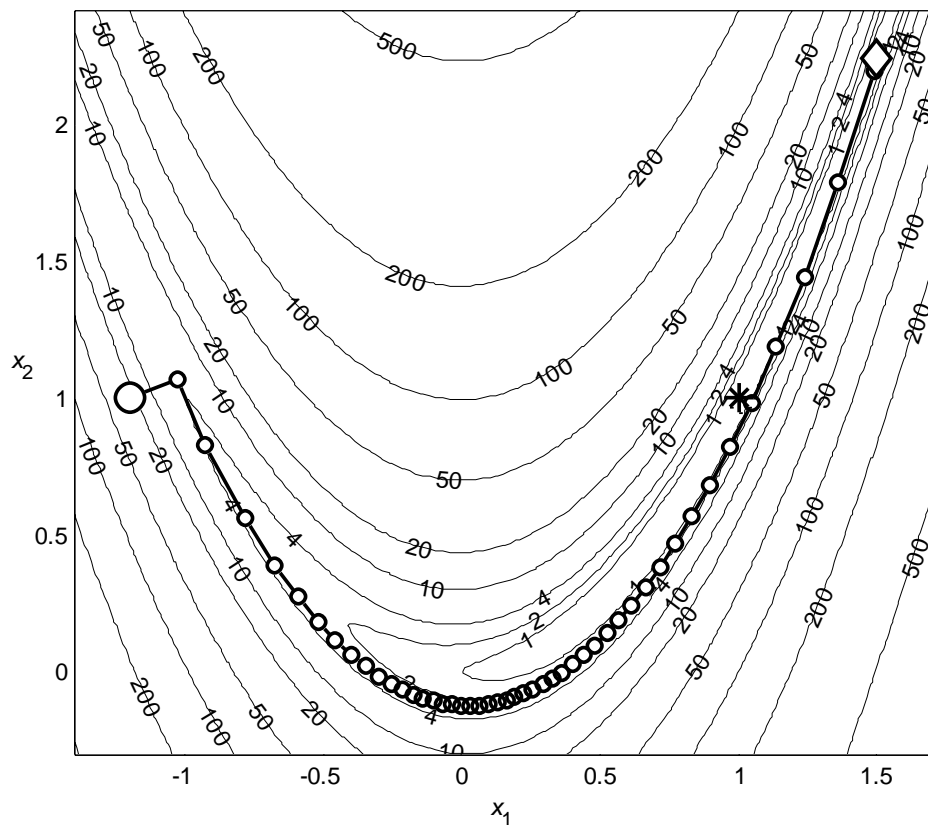


Рис. 5.26. Минимизация функции Розенброка методом Флетчера-Ривса

При нарушении условий сопряженности направлений метод Флетчера – Ривса начинает вычислять направления, движение вдоль которых неэффективно для минимизации функции. В связи с этим процесс построения сопряженных направлений вида (5.63) целесообразно вести циклами, начиная каждый цикл с направления наискорейшего спуска, то есть с антиградиента: как и в начальной итерации метод, запускается из текущей точки поиска по антиградиенту. Такое обновление работы метода называется повторным стартом или *рестартом*. С помощью рестартов эффективность метода Флетчера – Ривса можно существенно повысить. Для этого в приведенных алгоритмах через n или $2n$ итераций переходят не к шагу 2, а к шагу 1.

Пример 5.22. На рис. 5.27 представлена траектория минимизации функции Розенброка методом Флетчера – Ривса с рестартами, которые выполняются через каждые $2n$ итераций. Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 24 итерации и 327 вычислений функции.

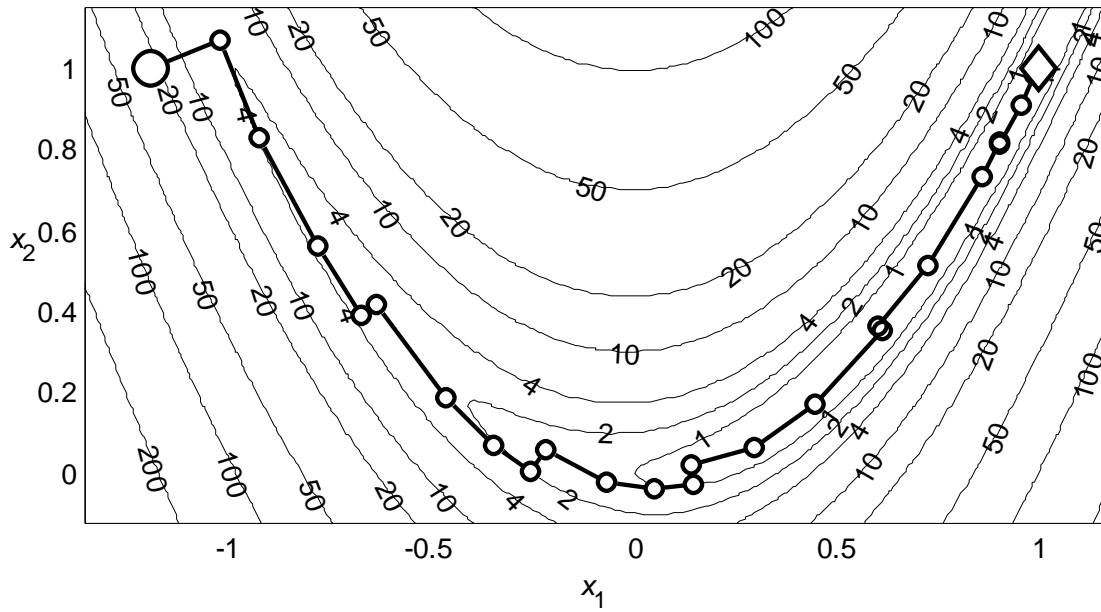


Рис. 5.27. Минимизация функции Розенброка методом Флетчера – Ривса с рестартами

Метод Полака – Рибьера

Этот метод сопряженных градиентов представлен американскими математиками Э. Полаком и Д. Рибьером в 1969 году. Для его обоснования применим первое из свойств (5.57) в виде $\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_{k-1} = 0$, $k = \overline{1, n-1}$. Из этой формулы следует, что

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_{k-1} = \mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}).$$

Поэтому формулу Флетчера – Ривса (5.61) для вычисления коэффициента β_{k-1} можно представить в виде:

$$\beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (5.65)$$

Эта формула называется *формулой Полака – Рибьера*, а онованный на ее использовании метод называется *методом Полака – Рибьера*. В этом методе задается начальная точка \mathbf{x}_0 , в ней вычисляется значение градиента $\mathbf{g}_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0)$. В направлении антиградиента производится одномерный поиск и находится следующая точка:

$$\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0). \quad (5.66)$$

Последующие итерации основаны на вычислении градиента $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$, формулах методов спуска (5.16), методов сопряженных градиентов (5.56) и формулы Полака – Рибьера (5.65):

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (5.67)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k). \quad (5.68)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность. Формулы метода Полака – Рибьера (5.66)–(5.68) отличаются от соответствующих формул метода Флетчера – Ривса (5.62)–(5.64) только формулой вычисления коэффициента β_{k-1} . По формулам (5.66)–(5.68) составим алгоритм метода Полака – Рибьера.

Алгоритм метода Полака – Рибьера.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$.
2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.
3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.
4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\beta = \mathbf{g}_x^T \cdot (\mathbf{g}_x - \mathbf{g}_y) / (\mathbf{g}_y^T \cdot \mathbf{g}_y)$.
5. Положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x + \beta \cdot \mathbf{d}$.
6. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
7. Остановиться.

Этот алгоритм отличается от алгоритма метода Флетчера – Ривса только вычислением параметра β на шаге 4.

Пример 5.23. Для вычисления точки минимума квадратичной функции (5.3) с допустимой погрешностью 10^{-3} метод Полака – Рибьера

затратил 3 итерации 19 вычислений функции, причем за две итерации найдено значение функции $1,8 \cdot 10^{-14}$. При этом траектория минимизации такая же, как и на рис. 3.5 для метода Флетчера – Ривса.

Пример 5.24. На рис. 5.28 представлена траектория минимизации функции Розенброка методом Полака – Рибьера. Вычисление точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} потребовало 17 итераций и 266 вычислений функции.

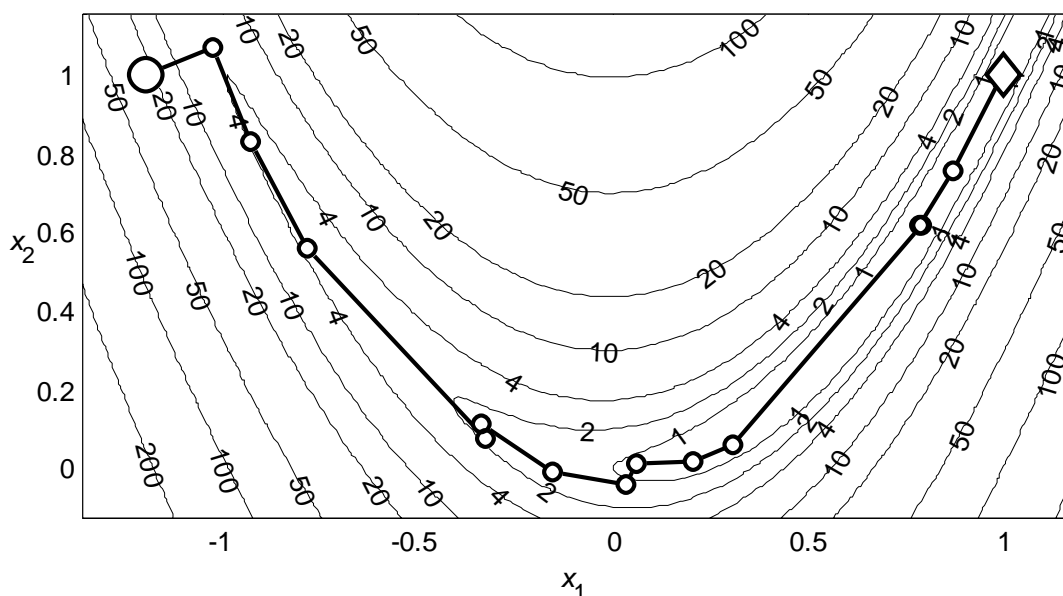


Рис. 5.28. Минимизация функции Розенброка методом Полака – Рибьера

Если все вычисления, включая одномерный поиск, проводятся с абсолютной точностью, то при минимизации квадратичной положительно определенной целевой функции методы Флетчера – Ривса и Полака – Рибьера производят одинаковые последовательности точек поиска, то есть траектории поиска в обоих методах совпадают.

Однако при минимизации целевых функций общего вида в результате большого количества вычислительных экспериментов установлено, что метод Полака – Рибьера гораздо эффективнее метода Флетчера – Ривса. Эвристическое объяснение этого факта состоит в том, что в связи с отличием целевой функции от квадратичной функции и неточностью одномерного поиска вырабатываемые методом Полака – Рибьера направления все с меньшей точностью удовлетворяют условиям сопряженности. В результате вновь построенный по формуле (5.67) вектор направления \mathbf{d}_k

становится почти ортогональным градиенту \mathbf{g}_k и метод может временно «застрять». В таком случае имеем $\mathbf{g}_{k+1} \approx \mathbf{g}_k$, поэтому по формуле Полака – Рибьера (5.65) получим значение β_k , близкое к нулю. Но тогда следующий вектор направления \mathbf{d}_{k+1} , построенный согласно (5.67), оказывается близким к $-\mathbf{g}_{k+1}$, и автоматически происходит рестарт метода. Формула Флетчера – Ривса (5.61) таким свойством не обладает, поэтому в методе Флетчера – Ривса применяют принудительные рестарты. Метод Полака – Рибьера также может применяться с рестартами.

Итак, метод Полака – Рибьера эффективен даже при наличии ошибок вычислений и обладает малой чувствительностью к ошибкам округления при проведении одномерных поисков. Ему принадлежит ведущая роль при решении задач безусловной минимизации большой размерности.

В настоящее время построено и применяется много других вариантов методов сопряженных градиентов. В частности, кроме формулы (5.65) известны формулы Хестенса – Штифеля, Диксона и Даи – Юана:

$$\beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}{\mathbf{d}_{k-1}^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}, \quad \beta_{k-1} = -\frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}.$$

Все эти формулы производят одинаковые направления поиска, когда используются для минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей Гессе и точным одномерным поиском. Однако для нелинейной функции общего вида с неточным одномерным поиском их действия значительно отличаются.

5.4. Квазиньютоновские методы

Основы квазиньютоновских методов

Модифицированный метод Ньютона с одномерным поиском (5.27) для минимизации целевой функции $f(\mathbf{x})$ с $\mathbf{x} \in R^n$ представляется итерационной формулой

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad (5.69)$$

где λ_k – значение параметра одномерной минимизации целевой функции из точки \mathbf{x}_k в направлении $\mathbf{d}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k$, $\mathbf{H}_k = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ – матрица Гессе,

$\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ – градиент. Модифицированный метод Ньютона – это метод второго порядка. Для многих задач оптимизации вычисление матрицы Гессе, состоящей из вторых частных производных, требует больших затрат машинного времени.

Квазиньютоновские методы также основаны на итерационной формуле (5.69). Однако при вычислении направления одномерного поиска \mathbf{d}_k выполняется аппроксимация матрицы Гессе или обратной к ней матрицы с использованием значений градиента. Таким образом, все квазиньютоновские методы – это методы первого порядка.

Рассмотрим принципы построения аппроксимирующей матрицы для обратной матрицы Гессе $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}$. Поскольку матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ симметрические, то начальное приближение матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ задается в виде некоторой симметрической положительно определенной матрицы \mathbf{G}_0 .

Положительная определенность матрицы обеспечивает соответствующее направление одномерного поиска $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{G}_0 \mathbf{g}_0$ из начальной точки \mathbf{x}_0 с градиентом целевой функции \mathbf{g}_0 как направление спуска. Обычно полагают $\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}$, тогда $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$ – направление наискорейшего спуска. Из начальной точки \mathbf{x}_0 в направлении \mathbf{d}_0 выполняют одномерный поиск минимума целевой функции:

$$\lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0.$$

В точке \mathbf{x}_1 вычисляется значение градиента целевой функции \mathbf{g}_1 . Для последующих итераций построение аппроксимирующей матрицы основано на свойстве (5.46) квадратичной функции (5.39) с $\mathbf{A} = \mathbf{H}$

$$\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k = \mathbf{H}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k). \quad (5.70)$$

С обозначениями

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \quad (5.71)$$

свойство (5.70) примет вид

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{H} \mathbf{s}_k. \quad (5.72)$$

Умножая это равенство слева на обратную матрицу Гессе $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$, получим $\mathbf{G} \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k$. Если известна аппроксимация матрицы Гессе \mathbf{G}_k в точке

\mathbf{x}_k , то следующее ее приближение \mathbf{G}_{k+1} в точке \mathbf{x}_{k+1} должно удовлетворять уравнению

$$\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k. \quad (5.73)$$

Это матрично-векторное уравнение называется *квазиньютоновским условием*. Оно представляет собой систему n линейных алгебраических уравнений. С учетом свойства симметричности матрица \mathbf{G}_{k+1} имеет

$$N = n + (n^2 - n)/2 = n(n+1)/2$$

неизвестных элементов, то есть система линейных алгебраических уравнений (5.73) содержит больше неизвестных, чем уравнений. Для ее решения необходимо дополнительное условие, которое записывается в виде *уравнения коррекции*

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \Delta\mathbf{G}_k. \quad (5.74)$$

Здесь $\Delta\mathbf{G}_k$ – симметрическая матрица, называемая *поправкой* и формируемая так, чтобы выполнялась система уравнений (5.73). Различные квазиньютоновские методы отличаются между собой формулами для поправки $\Delta\mathbf{G}_k$.

После определения аппроксимирующей матрицы \mathbf{G}_k на последующих итерациях квазиньютоновского метода направление одномерного поиска определяется по формуле

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{G}_k\mathbf{g}_k. \quad (5.75)$$

В этом направлении из точки \mathbf{x}_k выполняется одномерный поиск:

$$\lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda\mathbf{d}_k), \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k\mathbf{d}_k. \quad (5.76)$$

Итерации продолжаются, пока не выполнится условие окончания процесса оптимизации

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность.

Направление поиска (5.75) отличается от направления метода наискорейшего спуска в формуле (5.20) $-\mathbf{g}_k$ умножением $-\mathbf{g}_k$ на изменяю-

щуюся на каждой итерации матрицу \mathbf{G}_k . Направление (5.75) можно представить как направление метода наискорейшего спуска в пространстве переменных с измененной метрикой. Поэтому квазиньютоновские методы называются также *методами переменной метрики*.

Метод Бroyдена

Для того, чтобы аппроксимация обратной матрицы Гессе давала симметрическую матрицу, поправка $\Delta \mathbf{G}_k$ в формуле (5.74) должна быть также симметрической матрицей. Возьмем произвольный ненулевой вектор $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$ и построим матрицу

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) = \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & \dots & u_2 u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \dots & u_n u_n \end{pmatrix}.$$

Это симметрическая матрица с пропорциональными строками, поэтому она имеет единичный ранг $\text{rank}(\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = 1$. Сформируем поправку ранга один в виде $\Delta \mathbf{G}_k = \alpha \mathbf{u}\mathbf{u}^T$, где α – некоторый вещественный коэффициент. По формуле (5.74)

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u}\mathbf{u}^T. \quad (5.77)$$

Система линейных алгебраических уравнений (5.73) принимает вид

$$(\mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u}\mathbf{u}^T) \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k.$$

Раскрывая скобки, имеем

$$\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k + \alpha \mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k,$$

то есть

$$(\alpha \mathbf{u}^T \mathbf{p}_k) \mathbf{u} = \mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k,$$

где скобки содержат скалярную величину. Это векторное равенство удовлетворяется, если положить $\mathbf{u} = \mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k$ и $\alpha = 1/(\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k)$ при условии $\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k \neq 0$. Тогда равенство (5.77) примет вид

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \frac{(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T}{(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k}. \quad (5.78)$$

Эта формула коррекции аппроксимации обратной матрицы Гессе представлена в 1967 году английским математиком Ч. Д. Бройденом и называется *формулой Бройдена*, а использующий ее квазиньютоновский метод называется *методом Бройдена*. Таким образом, метод Бройдена основан на формулах (5.71), (5.75), (5.76) и (5.78). Первая итерация начинается из заданной начальной точки \mathbf{x}_0 , и в направлении антиградиента выполняется одномерный поиск:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0. \quad (5.79)$$

Последующие итерации для $k = 1, 2, 3, \dots$ выполняются по формулам:

$$\mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}, \quad \mathbf{s}_{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}, \quad (5.80)$$

$$\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{s}_{k-1} - \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}, \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{G}_{k-1} + \frac{\mathbf{u}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}^T}{\mathbf{u}_{k-1}^T \mathbf{p}_{k-1}}, \quad (5.81)$$

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{G}_k \mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k. \quad (5.82)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность. По формулам (5.79)–(5.82) составим алгоритм метода Бройдена.

Алгоритм метода Бройдена.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$, $\mathbf{G} = \mathbf{E}$.

2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.

4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{p} = \mathbf{g}_x - \mathbf{g}_y$, $\mathbf{u} = \mathbf{s} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{p}$.

5. Положить $\mathbf{G} = \mathbf{G} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T / (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p})$.
6. Вычислить $\mathbf{d} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{g}_x$.
7. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
8. Остановиться.

Пример 5.25. На рис. 5.29 представлена траектория минимизации квадратичной функции (5.3) методом Бройдена. Для вычисления точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод затратил 3 итерации и 19 вычислений функции. За две итерации получено приближение точки минимума с погрешностью $9,7 \cdot 10^{-8}$. При этом траектория минимизации квадратичной функции методом Бройдена такая же, как и траектория минимизации этой же функции методом Флетчера – Ривса из примера 5.20, представленная на рис. 5.25.

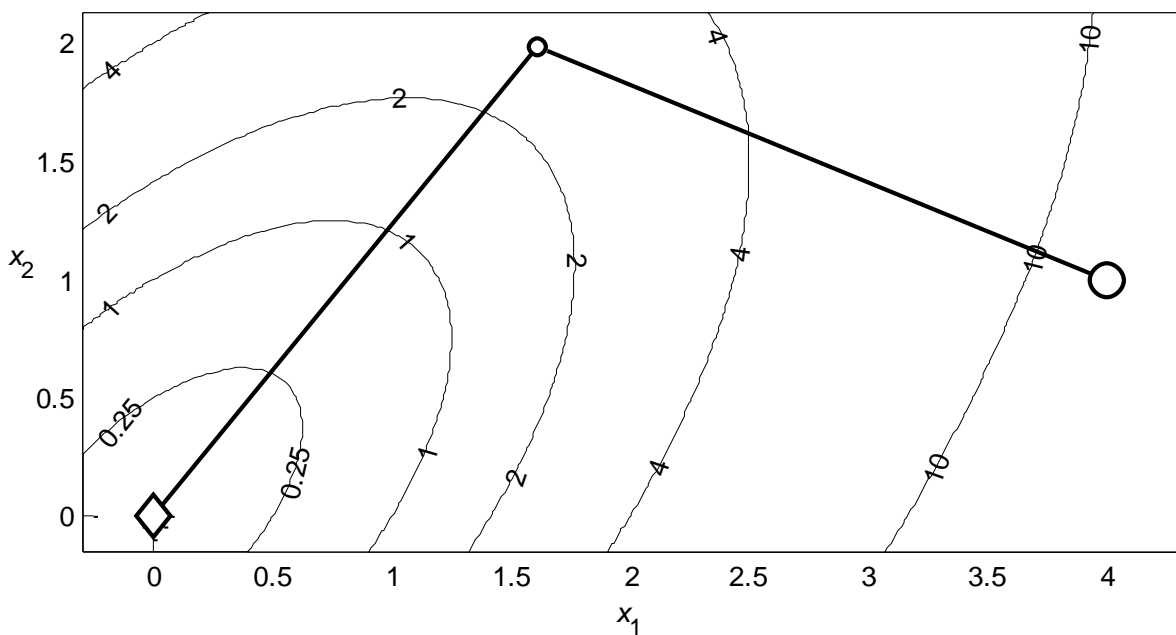


Рис. 5.29. Минимизация квадратичной функции методом Бройдена

Пример 5.26. На рис. 5.30 представлена траектория минимизации функции Розенброка методом Бройдена. Вычисление точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} потребовало 17 итераций и 269 вычислений функции, что сравнимо с результатами метода Полака – Рибьера из примера 5.24. Траектория поиска такая же, как и на рис. 5.28 для метода Полака – Рибьера.

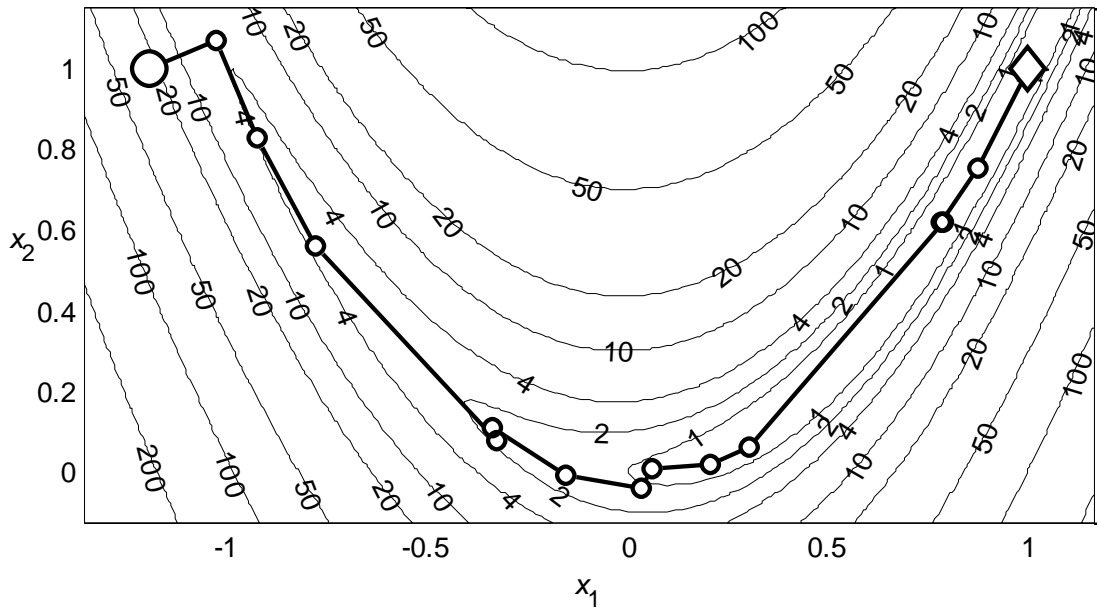


Рис. 5.30. Минимизация функции Розенброка методом Бройдена

Свойства метода Бройдена

Рассмотрим и обоснуем свойства метода Бройдена.

Свойство 1. Если в формуле Бройдена (5.78) матрица \mathbf{G}_k симметрическая, то матрица \mathbf{G}_{k+1} также симметрическая.

Доказательство. Пусть матрица \mathbf{G}_k симметрическая, то есть $\mathbf{G}_k^T = \mathbf{G}_k$. Тогда по формуле Бройдена (5.78) с обозначениями $\mathbf{u} = \mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k$ и $\alpha = 1/(\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k)$ придем к формуле (5.77). Применяя свойства матриц, получим:

$$\mathbf{G}_{k+1}^T = (\mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u} \mathbf{u}^T)^T = \mathbf{G}_k^T + \alpha (\mathbf{u}^T)^T \mathbf{u}^T = \mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u} \mathbf{u}^T.$$

Следовательно, $\mathbf{G}_{k+1}^T = \mathbf{G}_{k+1}$. \square

Свойство 2. Если в формуле Бройдена (5.78) матрица \mathbf{G}_k положительно определенная и $(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k > 0$, то матрица \mathbf{G}_{k+1} также положительно определенная.

Доказательство. Пусть матрица \mathbf{G}_k положительно определенная, то есть $\mathbf{x}^T \mathbf{G}_k \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Тогда по формуле Бройдена (5.78) с обозначениями $\mathbf{u} = \mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k$ и $\alpha = 1/(\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k)$ получим:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{G}_k \mathbf{x} + \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{G}_k \mathbf{x} + \alpha (\mathbf{x}^T \mathbf{u})^2.$$

При $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ в правой части этого равенства первое слагаемое положительно, а второе неотрицательно, если $\alpha = 1/[(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k] > 0$, то есть если $(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k > 0$. Тогда $\mathbf{x}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. \square

Свойство 3. При минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} методом Бroyдена выполняются равенства:

$$\mathbf{G}_k \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (5.83)$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $k=1$ равенство (5.83) вытекает из квазиньютоновского условия (5.73) в виде $\mathbf{G}_1 \mathbf{p}_0 = \mathbf{s}_0$. Предположим, что равенства (5.83) выполнены для некоторого k . Тогда для $i = \overline{0, k-1}$ с учетом свойства квадратичной функции (4.4) в виде $\mathbf{p}_i = \mathbf{H} \mathbf{s}_i$ получим:

$$(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k^T \mathbf{G}_k \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k^T \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_k^T \mathbf{H} \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k^T \mathbf{H} \mathbf{s}_i = 0.$$

Отсюда по формуле Бroyдена (5.78) и гипотезе индукции имеем:

$$\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{p}_i = \mathbf{G}_k \mathbf{p}_i + \frac{(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_i}{(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k} = \mathbf{G}_k \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i, \quad i = \overline{0, k-1}.$$

С учетом квазиньютоновского условия (5.73) $\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k$ окончательно получим: $\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i, \quad i = \overline{0, k}$. \square

Свойство 4. Если при минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} метод Бroyдена производит линейно независимые направления $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{n-1}$, то $\mathbf{G}_n = \mathbf{H}^{-1}$ и минимум находится не более чем за $n+1$ итерацию.

Доказательство. При сделанных предположениях после n итераций метода Бroyдена выполняются равенства (5.83) при $k=n$ в виде $\mathbf{G}_n \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i, \quad i = \overline{0, n-1}$. Отсюда с учетом свойства квадратичной функции (5.72) в виде $\mathbf{p}_i = \mathbf{H} \mathbf{s}_i$ имеем: $\mathbf{G}_n \mathbf{H} \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i, \quad i = \overline{0, n-1}$. Поскольку векторы \mathbf{s}_i образуют n линейно независимых направлений, которые можно представить столбцами невырожденной матрицы \mathbf{S} , то справедливо матричное

уравнение $\mathbf{G}_n \mathbf{H} \mathbf{S} = \mathbf{S}$. Умножая это равенство справа на матрицу \mathbf{S}^{-1} , получим $\mathbf{G}_n \mathbf{H} = \mathbf{E}$, откуда $\mathbf{G}_n = \mathbf{H}^{-1}$. Поэтому следующая итерация метода Бройдена является итерацией метода Ньютона и приведет к точке минимума квадратичной функции. \square

Заметим, что в доказательстве этого свойства не используется условие точного одномерного поиска.

Свойство 5. Если при минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} методом Бройдена выполняется точный одномерный поиск, то направления поиска $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{n-1}$ являются \mathbf{H} -сопряженными.

Доказательство. При выполнении условий данного утверждения требуется доказать, что

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_k = 0, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (5.84)$$

Докажем это свойство методом математической индукции. При $k=1$ с учетом (5.82) имеем:

$$\mathbf{s}_0^T \mathbf{H} \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0^T \mathbf{H} \lambda_1 \mathbf{d}_1 = \mathbf{s}_0^T \mathbf{H} (-\lambda_1 \mathbf{G}_1 \mathbf{g}_1) = -\lambda_1 \mathbf{s}_0^T \mathbf{H} \mathbf{G}_1 \mathbf{g}_1 = -\lambda_1 (\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \mathbf{s}_0)^T \mathbf{g}_1.$$

Отсюда по свойству 3 в виде $\mathbf{G}_1 \mathbf{p}_0 = \mathbf{s}_0$ и по условию точного одномерного поиска (5.45) в виде $\mathbf{s}_0^T \mathbf{g}_1 = 0$ получим:

$$\mathbf{s}_0^T \mathbf{H} \mathbf{s}_1 = -\lambda_1 (\mathbf{G}_1 \mathbf{p}_0)^T \mathbf{g}_1 = -\lambda_1 \mathbf{s}_0^T \mathbf{g}_1 = 0.$$

Предположим, что равенства (5.84) выполнены для некоторого k . Докажем, что они выполняются и для $k+1$. Для $i = \overline{0, k}$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \lambda_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} = \lambda_{k+1} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} (-\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}) = -\lambda_{k+1} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1} = \\ &= -\lambda_{k+1} (\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{s}_i)^T \mathbf{g}_{k+1} = -\lambda_{k+1} (\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{p}_i)^T \mathbf{g}_{k+1}. \end{aligned}$$

По свойству 3 получим

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_{k+1} = -\lambda_{k+1} \mathbf{s}_i^T \mathbf{g}_{k+1}, \quad i = \overline{0, k}. \quad (5.85)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_{i+1} + (\mathbf{g}_{i+2} - \mathbf{g}_{i+1}) + (\mathbf{g}_{i+3} - \mathbf{g}_{i+2}) + \dots + (\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k).$$

С учетом обозначений (4.3) имеем:

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^k (\mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j) = \mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^k \mathbf{p}_j.$$

По свойству квадратичной функции (4.4) в виде $\mathbf{p}_j = \mathbf{H}\mathbf{s}_j$ получим

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^k \mathbf{H}\mathbf{s}_j. \quad (5.86)$$

Равенство (4.17) примет вид

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{H}\mathbf{s}_{k+1} = -\lambda_{k+1} \mathbf{s}_i^T \left(\mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^k \mathbf{H}\mathbf{s}_j \right) = -\lambda_{k+1} \left(\mathbf{s}_i^T \mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^k \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}\mathbf{s}_j \right).$$

По условию точного одномерного поиска (5.45) в виде $\mathbf{s}_i^T \mathbf{g}_{i+1} = 0$ и сделанного предположения индукции (5.84) окончательно получим для $i = \overline{0, k}$ условие сопряженности $\mathbf{s}_i^T \mathbf{H}\mathbf{s}_{k+1} = 0$. Следовательно, равенства (5.84) выполняются для всех $k = \overline{1, n-1}$. \square

Это свойство показывает, что метод Бройдена является методом сопряженных направлений, поэтому он минимизирует квадратичную функцию с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} при выполнении точного одномерного поиска не более чем за n итераций.

В случае, когда целевая функция не является квадратичной, применение уравнения (5.78) может привести к нежелательным явлениям. Во-первых, матрица \mathbf{G}_k может перестать быть положительно определенной. Во-вторых, поправка $\Delta \mathbf{G}_k$ может стать неограниченной. В-третьих, если направление \mathbf{s}_k случайно совпадет с направлением предыдущей итерации, матрица \mathbf{G}_{k+1} становится вырожденной или неопределенной. В алгоритме Бройдена это тоже будет иметь место, если либо $\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k$, либо $(\mathbf{s}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k = 0$. Тогда знаменатель формулы (5.78) обращается в нуль. Эта особенность снижает надежность метода Бройдена.

Метод Девидона – Флетчера – Пауэлла

По аналогии с формулой (5.77) коррекции ранга один рассмотрим формулу коррекции ранга два

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \beta \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \quad (5.87)$$

где используются ненулевые векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ и скаляры $\alpha, \beta \in R$. Для системы линейных алгебраических уравнений (5.73) получим

$$(\mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \beta \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k.$$

Раскрывая скобки, после преобразований имеем

$$\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k + (\alpha \mathbf{u}^T \mathbf{p}_k) \mathbf{u} + (\beta \mathbf{v}^T \mathbf{p}_k) \mathbf{v} = \mathbf{s}_k,$$

где скобки содержат скалярные величины. Это уравнение превратится в тождество, если положить $\mathbf{u} = \mathbf{s}_k$, $\alpha = 1/(\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k)$, $\mathbf{v} = \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k$, $\beta = -1/(\mathbf{v}^T \mathbf{p}_k)$. Тогда равенство (5.87) примет вид

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} - \frac{\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k (\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T}{(\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k}. \quad (5.88)$$

Эта формула называется *формулой Девидона – Флетчера – Пауэлла* (ДФП), а использующий ее квазиньютоновский метод называется *методом Девидона – Флетчера – Пауэлла*. Формула (5.82) впервые представлена в 1959 году американским математиком В. Девидоном как часть метода оптимизации, а в 1963 году метод, основанный на формуле (5.88), развит английскими математиками Р. Флетчером и М. Д. Д. Пауэллом. Таким образом, метод ДФП основан на формулах (5.71), (5.75), (5.76) и (5.88). Как и в методе Бroyдена первая итерация начинается из заданной начальной точки \mathbf{x}_0 , и в направлении антиградиента выполняется одномерный поиск:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0. \quad (5.89)$$

Последующие итерации для $k = 1, 2, 3, \dots$ выполняются по формулам:

$$\mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}, \quad \mathbf{s}_{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}, \quad (5.90)$$

$$\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}, \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{G}_{k-1} + \frac{\mathbf{s}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}^T}{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{p}_{k-1}} - \frac{\mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}^T}{\mathbf{v}_{k-1}^T \mathbf{p}_{k-1}}, \quad (5.91)$$

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{G}_k \mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k. \quad (5.92)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon.$$

По формулам (5.89)–(5.92) составим алгоритм метода ДФП.

Алгоритм метода ДФП.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$, $\mathbf{G} = \mathbf{E}$.

2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.

4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{p} = \mathbf{g}_x - \mathbf{g}_y$, $\mathbf{v} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{p}$.

5. Положить $\mathbf{G} = \mathbf{G} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T / (\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T / (\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p})$.

6. Вычислить $\mathbf{d} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{g}_x$.

7. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.

8. Остановиться.

Пример 5.27. Для вычисления точки минимума квадратичной функции (5.3) с допустимой погрешностью 10^{-3} метод Девидона – Флетчера – Пауэлла затратил 3 итерации и 19 вычислений функции. При этом траектория минимизации квадратичной функции методом ДФП такая же, как и траектория минимизации этой же функции методом Бroyдена из примера 5.25, представленная на рис. 5.29.

Пример 5.284. На рис. 5.31 представлена траектория минимизации функции Розенброка методом Девидона – Флетчера – Пауэлла. Одномерный поиск с начальным единичным шагом производился комбинацией метода Свенна и метода квадратичной интерполяции с тремя точками при допустимой погрешности шага 10^{-5} . Для нахождения точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} метод ДФП использовал 17 итераций и 265 вычислений функции. Траектория минимизации такая же, как и траектория метода Бroyдена из примера 5.26, представленная на рис. 5.30.

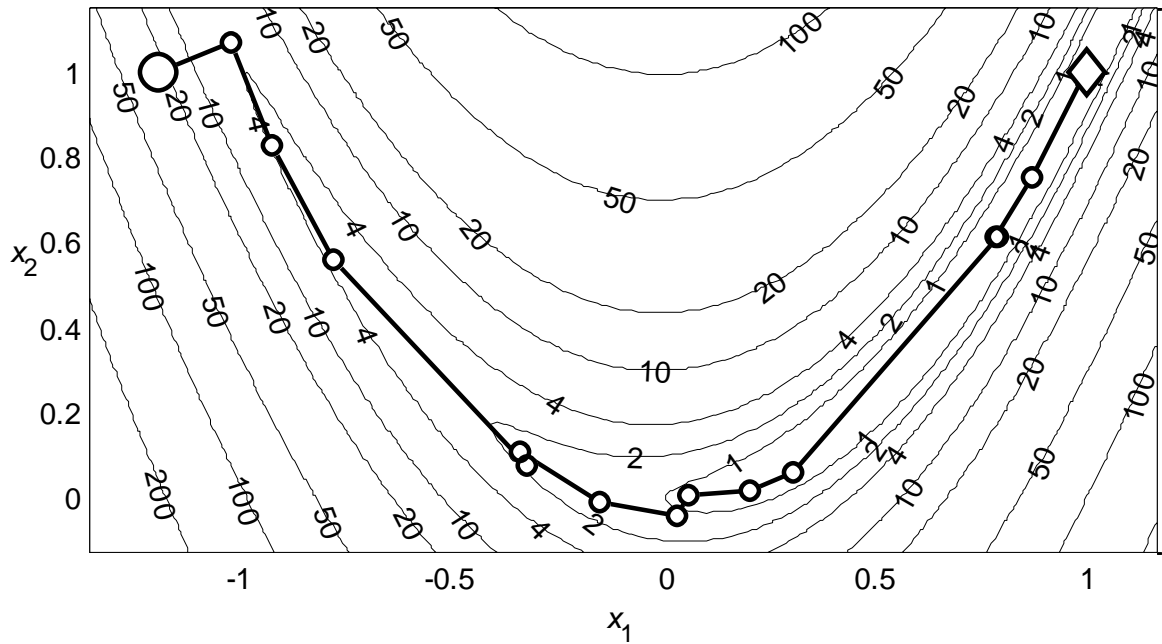


Рис. 5.31. Минимизация функции Розенброка методом ДФП

Свойства метода Девидона – Флетчера – Пауэлла

Эффективность метода ДФП определяется его свойствами.

Свойство 1. Если в формуле ДФП (4.20) матрица \mathbf{G}_k симметрическая, то матрица \mathbf{G}_{k+1} также симметрическая.

Доказательство. Пусть матрица \mathbf{G}_k симметрическая, то есть $\mathbf{G}_k^T = \mathbf{G}_k$. Тогда, по формуле ДФП (5.88) с обозначениями $\mathbf{u} = \mathbf{s}_k$, $\alpha = 1/(\mathbf{u}^T \mathbf{p}_k)$, $\mathbf{v} = \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k$, $\beta = -1/(\mathbf{v}^T \mathbf{p}_k)$ придем к формуле (5.87). Используя свойства матриц, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{k+1}^T &= (\mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \beta \mathbf{v} \mathbf{v}^T)^T = \mathbf{G}_k^T + \alpha (\mathbf{u}^T)^T \mathbf{u}^T + \beta (\mathbf{v}^T)^T \mathbf{v}^T = \\ &= \mathbf{G}_k + \alpha \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \beta \mathbf{v} \mathbf{v}^T. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{G}_{k+1}^T = \mathbf{G}_{k+1}$. \square

Свойство 2. Если в формуле ДФП (5.88) матрица \mathbf{G}_k положительно определенная и $\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k > 0$, то матрица \mathbf{G}_{k+1} также положительно определенная.

Доказательство. Пусть матрица \mathbf{G}_k положительно определенная и $\mathbf{x}^T \mathbf{G}_k \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Тогда по формуле ДФП (5.88) имеем

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{G}_k \mathbf{x} + \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{s}_k)^2}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} - \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^2}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k}.$$

Обозначая $\mathbf{a} = \mathbf{G}_k^{1/2} \mathbf{x}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{G}_k^{1/2} \mathbf{p}_k$, получим

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}^T \mathbf{a})(\mathbf{b}^T \mathbf{b}) - (\mathbf{a}^T \mathbf{b})^2}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} + \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{s}_k)^2}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k}.$$

В правой части этого равенства первое слагаемое неотрицательно в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца $|\mathbf{a}^T \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$, а второе слагаемое неотрицательно, если $\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k > 0$. Покажем, что эти слагаемые не могут одновременно обращаться в нуль. Если первое слагаемое равно нулю, то $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$, а, значит, и $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{p}_k$ при $\alpha \neq 0$. Но тогда по условию $\mathbf{x}^T \mathbf{s}_k = \alpha \mathbf{p}_k^T \mathbf{s}_k \neq 0$. Поэтому $\mathbf{x}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. \square

Заметим, что условие этого свойства $\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k > 0$ выполняется при условии точного одномерного поиска (5.45) в виде $\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_{k+1} = 0$ и обеспечении \mathbf{s}_k как направления спуска, для которого $\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k < 0$. Действительно, в силу равенств (5.90) и (5.92) $\mathbf{s}_k = -\lambda_k \mathbf{G}_k \mathbf{g}_k$, $\lambda_k > 0$. Поэтому

$$\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k^T (\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k) = \mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k = -\mathbf{s}_k^T \mathbf{g}_k = \lambda_k \mathbf{g}_k^T \mathbf{G}_k \mathbf{g}_k > 0.$$

Свойство сохранения положительной определенности матрицы \mathbf{G}_k гарантирует, что направление \mathbf{d}_k является направлением спуска.

Свойство 3. При минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} методом ДФП с точным одномерным поиском выполняются равенства:

$$\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i, \quad i = \overline{0, k}; \quad (5.93)$$

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_k = 0, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (5.94)$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Из квазиньютоновского условия (5.73) в виде $\mathbf{G}_1 \mathbf{p}_0 = \mathbf{s}_0$ с учетом свойства квадратичной функции (5.72) в виде $\mathbf{p}_0 = \mathbf{H} \mathbf{s}_0$ имеем $\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_0$. Отсюда по формулам (5.92) с точным одномерным поиском получим:

$$\mathbf{s}_0^T \mathbf{H} \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0^T \mathbf{H} \lambda_1 \mathbf{d}_1 = \mathbf{s}_0^T \mathbf{H} (-\lambda_1 \mathbf{G}_1 \mathbf{g}_1) = -\lambda_1 (\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \mathbf{s}_0)^T \mathbf{g}_1 = -\lambda_1 \mathbf{s}_0^T \mathbf{g}_1 = 0.$$

Таким образом, равенства (5.93) и (5.94) выполняются при начальных значениях $k=0$ и $k=1$ соответственно.

Предположим, что равенства (5.93) и (5.94) выполнены для некоторого k . Докажем, что они выполняются и для $k+1$. Для $i = \overline{0, k}$ с использованием равенств (5.92) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \lambda_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} = \lambda_{k+1} \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} (-\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}) = \\ &= -\lambda_{k+1} (\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{s}_i)^T \mathbf{g}_{k+1} = -\lambda_{k+1} \mathbf{s}_i^T \mathbf{g}_{k+1}. \end{aligned}$$

Применяя формулу (4.18) для градиента квадратичной функции, имеем

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_{k+1} = -\lambda_{k+1} \mathbf{s}_i^T \left(\mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^k \mathbf{H} \mathbf{s}_j \right) = -\lambda_{k+1} \left(\mathbf{s}_i^T \mathbf{g}_{i+1} + \sum_{j=i+1}^k \mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_j \right).$$

По условию точного одномерного поиска (5.45) в виде $\mathbf{s}_i^T \mathbf{g}_{i+1} = 0$ и сделанного предположения индукции (5.94) получим для $i = \overline{0, k}$ условие сопряженности $\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_{k+1} = 0$. Это и доказывает справедливость равенств (5.94) для произвольного k .

С учетом свойства квадратичной функции (5.72) в виде $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{H} \mathbf{s}_{k+1}$, предположения индукции (5.93) и доказанного равенства $\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_{k+1} = 0$ для $i = \overline{0, k}$ имеем:

$$\mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{s}_i = \mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{k+1}^T \mathbf{H} \mathbf{s}_i = 0.$$

Отсюда по формуле ДФП (5.88) получим:

$$\mathbf{G}_{k+2} \mathbf{H} \mathbf{s}_i = \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{s}_i + \frac{\mathbf{s}_{k+1} (\mathbf{s}_{k+1}^T \mathbf{H} \mathbf{s}_i)}{\mathbf{s}_{k+1}^T \mathbf{p}_{k+1}} - \frac{\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{p}_{k+1} (\mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{s}_i)}{\mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{p}_{k+1}} = \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{H} \mathbf{s}_i,$$

то есть по предположениям индукции $\mathbf{G}_{k+2}\mathbf{H}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i$ для $i = \overline{0, k}$. С учетом квазиньютоновского условия (5.73) в виде $\mathbf{G}_{k+2}\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{s}_{k+1}$ и свойства квадратичной функции (5.72) в виде $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{s}_{k+1}$ имеем $\mathbf{G}_{k+2}\mathbf{H}\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_{k+1}$. Итак $\mathbf{G}_{k+2}\mathbf{H}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i$ для $i = \overline{0, k+1}$, что доказывает справедливость равенств (5.93) для произвольного k . \square

Это свойство показывает, что в силу равенств (5.94) метод ДФП является методом сопряженных направлений, поэтому он минимизирует квадратичную функцию с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} при точном одномерном поиске не более чем за n итераций.

Свойство 4. При минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} методом ДФП с точным одномерным поиском после n итераций $\mathbf{G}_n = \mathbf{H}^{-1}$.

Доказательство. При сделанных предположениях после n итераций метода ДФП в силу выполнения равенств (5.94) при $k = n-1$ векторы $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{n-1}$ являются сопряженными. Поэтому по лемме 5.1 они линейно независимы. Представим их столбцами невырожденной матрицы \mathbf{S} . Поскольку при этом выполняются равенства (5.93) при $k = n-1$ в виде $\mathbf{G}_n\mathbf{H}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i$ для $i = \overline{0, n-1}$, то имеем $\mathbf{G}_n\mathbf{H}\mathbf{S} = \mathbf{S}$. Умножая это равенство справа на \mathbf{S}^{-1} , приходим к равенству $\mathbf{G}_n\mathbf{H} = \mathbf{E}$, откуда получим $\mathbf{G}_n = \mathbf{H}^{-1}$. Это означает, что после n итераций метода ДФП аппроксимация обратной матрицы Гессе совпадает с ней. \square

Свойство 5. При минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей Гессе \mathbf{H} методом ДФП с точным одномерным поиском после n итераций

$$\mathbf{H}^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathbf{s}_i\mathbf{s}_i^T}{\mathbf{s}_i^T\mathbf{p}_i}. \quad (5.95)$$

Доказательство. После n итераций метода ДФП в силу равенств (5.94) при $k = n-1$ векторы $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{n-1}$ являются сопряженными и линейно независимыми. Сформируем из них невырожденную матрицу \mathbf{S} . Из условий сопряженности (5.94) $\mathbf{S}^T\mathbf{H}\mathbf{S} = \mathbf{D}$, где \mathbf{D} — диагональная матрица с элементами $\mathbf{s}_i^T\mathbf{H}\mathbf{s}_i$. Поэтому $\mathbf{H} = (\mathbf{S}^T)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$. Тогда $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^T$,

где \mathbf{D}^{-1} – диагональная матрица с элементами $1/(\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_i)$. Перемножим матрицы в правой части последнего равенства

$$\mathbf{H}^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_i}.$$

Отсюда с использованием свойства квадратичной функции (5.72) в виде $\mathbf{p}_i = \mathbf{H} \mathbf{s}_i$ получим равенство (5.95). \square

Представим формулу ДФП (5.88) в виде

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k,$$

где

$$\mathbf{A}_k = \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k}, \quad \mathbf{B}_k = \frac{\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k (\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T}{(\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k}.$$

Тогда

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{G}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_k - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_k.$$

Для квадратичной функции по свойствам 4 и 5 имеем:

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{G}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_k - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_k, \quad \mathbf{H}^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_k, \quad \mathbf{G}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_k.$$

Отсюда следует, что начальное задание аппроксимирующей матрицы $\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}$ в процессе минимизации квадратичной функции компенсируется последней дробью в формуле (5.88).

Приведенные свойства метода Девидона – Флетчера – Пауэлла проявляются и при минимизации дифференцируемой целевой функции общего вида.

Вычислительные эксперименты, проведенные многими исследователями, показали, что метод Девидона – Флетчера – Пауэлла очень чувствителен к точности одномерного поиска. Если одномерная минимизация целевой функции проводится с невысокой точностью, то эффективность этого метода снижается.

Метод Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно

Пусть \mathbf{H}_k – аппроксимация матрицы Гессе $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_k , причем она связана с аппроксимацией обратной матрицы Гессе равенством $\mathbf{H}_k = \mathbf{G}_k^{-1}$. Умножая квазиньютоновское условие (5.73) слева на матрицу \mathbf{H}_{k+1} , после преобразований получим

$$\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{s}_k = \mathbf{p}_k. \quad (5.96)$$

Эта формула отличается от формулы (4.5) тем, что матрица \mathbf{G}_{k+1} заменена матрицей \mathbf{H}_{k+1} , а векторы \mathbf{p}_k и \mathbf{s}_k поменялись местами. Выполним те же изменения в формуле ДФП (5.88)

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^T}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k)^T}{(\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k)^T \mathbf{s}_k}. \quad (5.97)$$

Эта формула называется *формулой Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно* (БФГШ), а использующий ее квазиньютоновский метод называется *методом Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно*. Метод БФГШ, основанный на формуле (5.97), представлен в 1970 году независимо английскими математиками Ч. Д. Бройденом и Р. Флетчером, американскими математиками Д. Гольдфарбом и Д. Ф. Шанно. Поскольку здесь аппроксимируется матрица Гессе, то направление одномерного поиска \mathbf{d}_k необходимо вычислять не по формуле (5.75), а путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{H}_k \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k. \quad (5.98)$$

Первая итерация начинается из заданной начальной точки \mathbf{x}_0 , и в направлении антиградиента выполняется одномерный поиск:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0. \quad (5.99)$$

Последующие итерации проводятся с учетом формул (5.97) и (5.98):

$$\mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}, \quad \mathbf{s}_{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}, \quad (5.100)$$

$$\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}, \quad \mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{k-1} + \frac{\mathbf{p}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}^T}{\mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{s}_{k-1}} - \frac{\mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}^T}{\mathbf{v}_{k-1}^T \mathbf{s}_{k-1}}, \quad (5.101)$$

$$\mathbf{H}_k \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k. \quad (5.102)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon.$$

По формулам (5.99)–(5.102) составим алгоритм метода Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.

Алгоритм метода БФГШ.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$, $\mathbf{H} = \mathbf{E}$.

2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.

4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{p} = \mathbf{g}_x - \mathbf{g}_y$, $\mathbf{v} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}$.

5. Положить $\mathbf{H} = \mathbf{H} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T / (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T / (\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{s})$.

6. Решить СЛАУ $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$.

7. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.

8. Остановиться.

Пример 5.29. Для вычисления точки минимума квадратичной функции (5.3) с допустимой погрешностью 10^{-3} метод БФГШ затратил 3 итерации и 19 вычислений функции. Траектория поиска такая же, как и траектория метода Бройдена из примера 5.25, представленная на рис. 5.29.

Пример 5.30. На рис. 5.32 показана траектория минимизации функции Розенброка методом БФГШ. Вычисление точки минимума с допустимой погрешностью 10^{-3} потребовало 17 итераций и 265 вычислений функции, что полностью совпало с результатами метода ДФП из примера 5.28. Траектории поиска на рис. 5.32 и рис. 5.31 также совпадают.

Этот метод обладает теми же свойствами, что и метод ДФП, но он менее чувствителен к точности одномерного поиска.

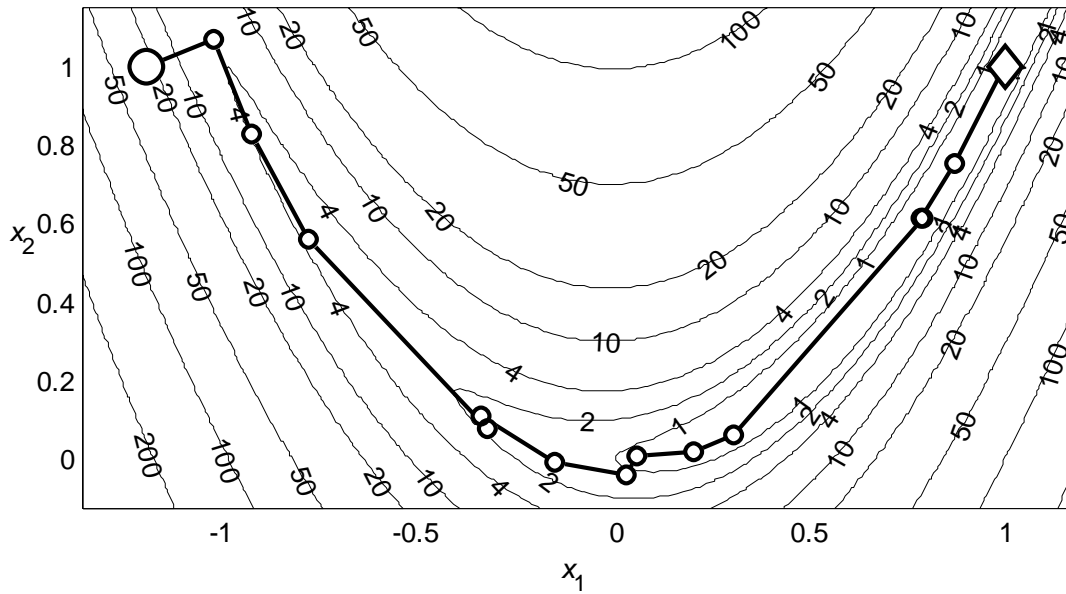


Рис. 5.32. Минимизация функции Розенброка методом БФГШ

Модификация метода БФГШ

Недостатком метода Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно по сравнению с методом Девидона – Флетчера – Пауэлла является необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений (5.98) для определения вектора направления одномерного поиска \mathbf{d}_k . Если коррекция некоторой квадратной матрицы \mathbf{A} проводится поправкой ранга один, то обратную матрицу можно найти по формуле Шермана – Моррисона

$$(\mathbf{A} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}.$$

Дважды применяя эту формулу к формуле БФГШ (5.97), получим модификацию этой формулы

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \left(1 + \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k}\right) \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} - \frac{\mathbf{s}_k (\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T + \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k}. \quad (5.103)$$

Эта формула называется *модифицированной формулой Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно*, а использующий её квазиньютоновский метод называется *модифицированным методом БФГШ*.

На первой итерации из заданной начальной точки \mathbf{x}_0 выполняется одномерный поиск в направлении антиградиента:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0. \quad (5.104)$$

Последующие итерации выполняются с учетом формулы (5.103):

$$\mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}, \quad \mathbf{s}_{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}, \quad \mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}, \quad (5.105)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{G}_{k-1} + \left(1 + \frac{\mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{v}_{k-1}}{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{p}_{k-1}} \right) \frac{\mathbf{s}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}^T}{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{p}_{k-1}} - \frac{\mathbf{s}_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}^T + \mathbf{v}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}^T}{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{p}_{k-1}}, \quad (5.106)$$

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{G}_k \mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k. \quad (5.107)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon.$$

По формулам (5.104)–(5.107) составим алгоритм модифицированного метода Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.

Алгоритм модифицированного метода БФГШ.

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$, $\mathbf{G} = \mathbf{E}$.
2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.
3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.
4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{p} = \mathbf{g}_x - \mathbf{g}_y$, $\mathbf{v} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{p}$, $\alpha = 1/\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{p}$.
5. Положить $\mathbf{G} = \mathbf{G} + (1 + \alpha \cdot \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{v}) \cdot \alpha \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T - \alpha \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^T)$.
6. Вычислить $\mathbf{d} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{g}_x$.
7. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.
8. Остановиться.

Этот алгоритм не требует решения системы линейных алгебраических уравнений в отличие от предыдущего алгоритма.

Пример 5.31. Для вычисления точки минимума квадратичной функции (5.3) с допустимой погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$ модифицированный метод БФГШ затратил 3 итерации и 19 вычислений функции. Траектория поиска такая же, как и траектория метода Бройдена из примера 5.25, представленная на рис. 5.29.

Пример 5.32. Минимизация функции Розенброка модифицированным методом БФГШ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и допустимой погрешностью одномерного поиска $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ потребовала 17 итераций и 265 вычислений функции, как и в примере 5.30, но время вычислений уменьшилось благодаря исключению решения СЛАУ. Траектория поиска такая же, как и на рис. 5.32. На рис. 5.33 представлена траектория минимизации функции Розенброка модифицированным методом БФГШ при $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, что потребовало 26 итераций и 166 вычислений функции. При снижении точности одномерного поиска число итераций возросло, но количество вычислений функции уменьшилось. Этот пример подтверждает слабую чувствительность метода БФГШ к точности одномерного поиска.

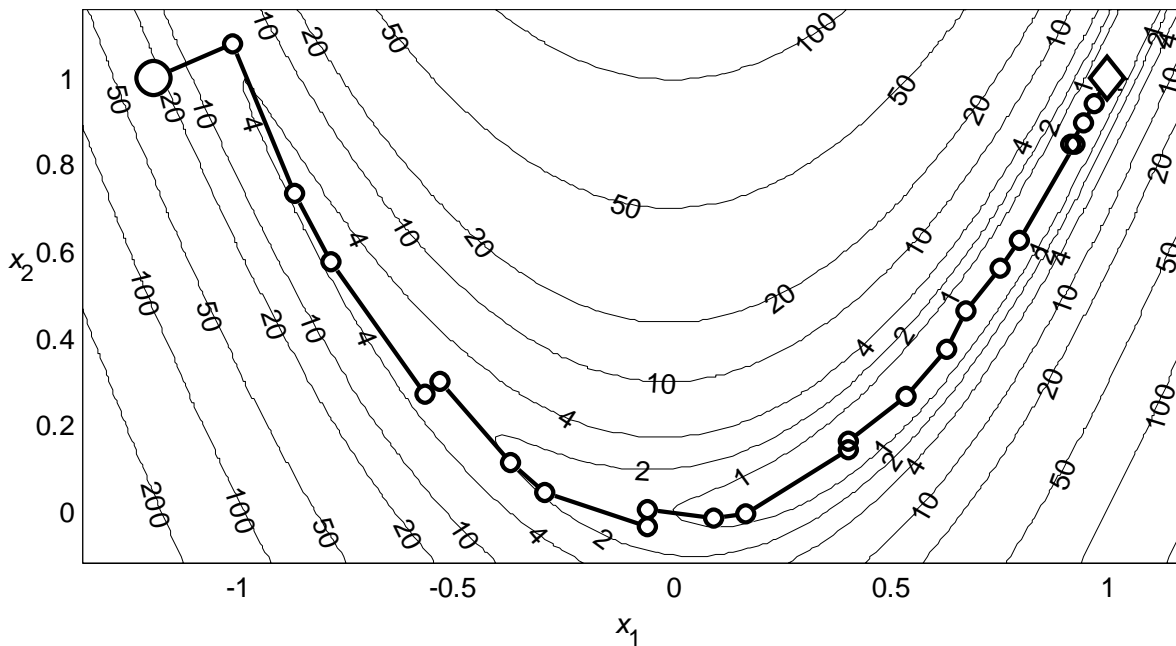


Рис. 5.33. Минимизация функции Розенброка модифицированным методом БФГШ

Сравнение методов безусловной оптимизации

Методы многомерной безусловной оптимизации, предназначенные для вычисления точки минимума \mathbf{x}^* унимодальной целевой функции многих переменных $f(\mathbf{x})$, по использованию значений производных функции делятся на три группы.

1. Методы нулевого порядка. Это метод циклического покоординатного спуска и метод сопряженных направлений Пауэлла, основанные на вычислении значений самой целевой функции и не использующие значений ее производных.

2. Методы первого порядка. Это метод наискорейшего спуска, методы сопряженных градиентов Флетчера – Ривса и Полака – Рибьера, квази-ньютоневские методы Бroyдена, ДФП и БФГШ, использующие значения первых производных целевой функции.

3. Методы второго порядка. Это метод Ньютона, метод Ньютона с одномерным поиском, метод Ньютона с направлением спуска и метод Марквардта, использующие значения первых и вторых производных целевой функции.

Эти методы многомерного поиска можно сравнить по скорости сходимости. Методы многомерного поиска должны порождать последовательность точек $\{\mathbf{x}_k\}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*.$$

Тогда по свойству предела

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| < \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|,$$

поэтому выполняется неравенство

$$\frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|} < 1,$$

В этом случае говорят о *глобальной сходимости* метода. Например, если непрерывно дифференцируемая функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$, то для любой начальной точки \mathbf{x}_0 метод наискорейшего спуска сходится к стационарной точке функции $f(\mathbf{x})$.

Глобальная сходимость методов сопряженных градиентов Флетчера – Ривса и Полака – Рибьера обеспечена лишь в случае процесса с периодической сменой начала, то есть с рестартами. Тогда их глобальная сходимость следует из глобальной сходимости метода наискорейшего спуска. Метод Ньютона не обладает свойством глобальной сходимости: если начальная точка \mathbf{x}_0 слишком далека от \mathbf{x}^* , то метод не сходится. Но методы Ньютона с одномерным поиском и с направлением спуска, а также метод Марквардта обладают глобальнойходимостью. Метод Бройдена не имеет глобальной сходимости. Квазиньютоновские методы Девидона – Флетчера – Пауэлла и Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно обладают глобальнойходимостью только в случае применений рестартов.

Если глобальная сходимость метода установлена, то вызывает интерес оценка ее эффективности. С практической точки зрения эффективность алгоритма зависит от числа итераций, необходимых для получения приближения оптимальной точки \mathbf{x}^* с допустимой погрешностью ε . Если допустить, что время вычисления итераций одинаково для всех алгоритмов, то наилучшим среди них будет тот, который требует наименьшего числа итераций.

Поведение последовательности точек $\{\mathbf{x}_k\}$ в окрестности оптимальной точки \mathbf{x}^* позволяет установить характер *асимптотической сходимости*. Если выполняется неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|} = \alpha < 1$$

и $\alpha \neq 0$, то говорят, что имеет место *линейная сходимость* и что α – соответствующий *коэффициент сходимости*.

При дальнейшем сравнении скорости сходимости методов минимизации будем полагать, что целевая функция $f(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема и матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ положительно определена. При этих условиях для метода наискорейшего спуска доказано, что последовательность $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}^*)}{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*)} = \alpha \leq \frac{A - a}{A + a},$$

где A и a – соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ в точке \mathbf{x}^* . В худшем случае имеет место ли-

нейная сходимость, для которой коэффициент асимптотической сходимости $(A - a)/(A + a)$ непосредственно связан с числом обусловленности матрицы $\text{cond } \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) = A/a$. Этот результат показывает, что сходимость метода наискорейшего спуска может быть очень медленной для плохо обусловленных функций овражного типа.

Если выполняется равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|} = 0,$$

то говорят, что имеет место *сверхлинейная сходимость*. При этом, если существует такое $\gamma > 1$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^\gamma} < +\infty,$$

то говорят, что имеет место *сходимость порядка γ* . В частности, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2} < +\infty,$$

то говорят, что имеет место *квадратичная сходимость*.

Методы сопряженных градиентов Флетчера – Ривса и Полака – Рибьера имеют сверхлинейную скорость сходимости по n шагам. Если матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица, то для этих методов доказана квадратичная скорость сходимости по n шагам.

Для квазиньютоновских методов ДФП и БФГШ доказана сверхлинейная скорость сходимости. Если матрица Гессе $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица, то для этих методов доказана квадратичная скорость сходимости. Это показывает преимущество квазиньютоновских методов перед методами сопряженных градиентов, которые требуют приблизительно в n раз больше итераций для одного и того же асимптотического поведения. Однако это преимущество сильно снижается загрузкой памяти пропорционально n^2 и объемом промежуточных матричных вычислений пропорционально n^2 .

Метод Ньютона имеет квадратичную локальную скорость сходимости, если $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ удовлетворяет в окрестности точки \mathbf{x}^* условию Липшица.

Следовательно, в малой окрестности оптимальной точки метод Ньютона при указанных предположениях относительно целевой функции $f(\mathbf{x})$ сходится быстрее остальных методов.

Однако при решении конкретных задач оптимизации необходимы вычислительные эксперименты для выбора самых эффективных методов, позволяющих надежно решать эти задачи с допустимой погрешностью при использовании минимальных вычислительных ресурсов.

Пример 5.33. В табл. 5.1–5.4 приведены число итераций и число вычислений функции при минимизации функции Розенброка с допустимой погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$ разными методами многомерной оптимизации: Ньютона с одномерным поиском (НОП), Ньютона с направлением спуска (ННС), Марквардта с одномерным поиском (МОП), Пауэлла (П), Полака – Рибьера (ПР), Бройдена (Б), ДФП и БФГШ. При этом для одномерного поиска использованы метод квадратичной интерполяции с тремя точками (И2) и метод кубической интерполяции с четырьмя точками (И3), а также различные значения допустимой погрешности одномерного поиска ε_1 . Очевидно, что эффективность многомерного метода существенно зависит от применяемого метода одномерного поиска и значения его допустимой погрешности. Для минимизации функции Розенброка самыми надежными и эффективными оказались методы Ньютона с одномерным поиском и БФГШ.

Таблица 5.1 – Число итераций с методом И2

| ε_1 | НОП | ННС | МОП | П | ПР | Б | ДФП | БФГШ |
|-----------------|-----|-----|-----|----|----|----|-----|------|
| 10^{-5} | 12 | 12 | 15 | 12 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 10^{-4} | 12 | 13 | 15 | 12 | 15 | 17 | 19 | 17 |
| 10^{-3} | 12 | 15 | 16 | 12 | – | 20 | – | 20 |

Таблица 5.2 – Число вычислений функции с методом И2

| ε_1 | НОП | ННС | МОП | П | ПР | Б | ДФП | БФГШ |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 10^{-5} | 260 | 307 | 398 | 529 | 266 | 269 | 265 | 265 |
| 10^{-4} | 216 | 252 | 288 | 423 | 206 | 221 | 237 | 219 |
| 10^{-3} | 163 | 200 | 228 | 304 | – | 193 | – | 199 |

Таблица 5.3 – Число итераций с методом ИЗ

| ε_1 | НОП | ННС | МОП | П | ПР | Б | ДФП | БФГШ |
|-----------------|-----|-----|-----|----|----|----|-----|------|
| 10^{-5} | 12 | 12 | 15 | 12 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 10^{-4} | 12 | 12 | 15 | 12 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 10^{-3} | 12 | 11 | 15 | – | 20 | 20 | – | 20 |

Таблица 5.4 – Число вычислений функции с методом ИЗ

| ε_1 | НОП | ННС | МОП | П | ПР | Б | ДФП | БФГШ |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 10^{-5} | 148 | 148 | 186 | 242 | 150 | 151 | 148 | 148 |
| 10^{-4} | 140 | 138 | 178 | 230 | 138 | 140 | 137 | 136 |
| 10^{-3} | 131 | 119 | 164 | – | 139 | 147 | – | 141 |

Контрольные вопросы к разделу 5

1. Дайте определения глобального и локального минимумов и максимумов функции многих переменных.
2. Приведите определение многоэкстремальной функции.
3. Дайте определение унимодальной функции.
4. Сформулируйте задачу многомерной безусловной минимизации.
5. Дайте определение решения задачи многомерной безусловной минимизации.
6. Какие функции называются выпуклыми и строго выпуклыми?
7. Какие функции называются вогнутыми и строго вогнутыми?
8. Объясните геометрический смысл определений выпуклой и вогнутой функций.
9. Сформулируйте и докажите теорему о минимуме выпуклой функции.
10. Сформулируйте следствия теоремы о минимуме выпуклой функции.
11. Какие методы применяются для решения задачи многомерной безусловной минимизации?
12. Дайте определение линии уровня и поверхности уровня функции многих переменных.
13. Раскройте роль условий оптимальности при изучении задач оптимизации.
14. Дайте определение градиента функции многих переменных.

15. Сформулируйте и докажите необходимое условие оптимальности первого порядка для существования экстремума функции нескольких переменных.

16. Дайте определение стационарной точки функции нескольких переменных.

17. Сформулируйте необходимое и достаточное условие оптимальности первого порядка для существования минимума выпуклой функции нескольких переменных.

18. Дайте определение матрицы Гессе функции многих переменных.

19. Объясните свойства матрицы Гессе функции многих переменных.

20. Сформулируйте и докажите необходимое условие оптимальности второго порядка для существования минимума функции многих переменных.

21. Сформулируйте и докажите достаточное условие оптимальности второго порядка для существования минимума функции многих переменных.

22. Сформулируйте критерий Сильвестра – Якоби для исследования матрицы Гессе на положительную и отрицательную определенность.

23. Как исследовать функцию многих переменных на экстремум с помощью критерия Сильвестра – Якоби?

24. Опишите метод циклического покоординатного спуска.

25. По какому принципу задается направление шага в методе циклического покоординатного спуска?

26. Как вычисляется величина шага в методе циклического покоординатного спуска?

27. Как заканчиваются вычисления в методе циклического покоординатного спуска?

28. Какого порядка метод циклического покоординатного спуска?

29. Составьте алгоритм метода циклического покоординатного спуска.

30. Укажите достоинства и недостатки метода циклического покоординатного спуска.

31. Дайте определение направления спуска.

32. Какие методы многомерной минимизации функций называются методами спуска?

33. Запишите условие точного одномерного поиска в многомерном пространстве.

34. Приведите формулы итерации метода спуска.

35. Составьте алгоритм метода спуска.

36. Как выполняется масштабирование направления поиска в методе спуска?

37. Дайте определение направления наискорейшего спуска.
38. Опишите метод наискорейшего спуска.
39. По какому принципу задается направление шага в методе наискорейшего спуска?
40. Как вычисляется величина шага в методе наискорейшего спуска?
41. Как заканчиваются вычисления в методе наискорейшего спуска?
42. Какого порядка метод наискорейшего спуска?
43. Составьте алгоритм метода наискорейшего спуска.
44. Какова особенность траектории поиска для метода наискорейшего спуска?
45. Укажите достоинства и недостатки метода наискорейшего спуска.
46. Зачем нужно уметь вычислять градиент функции многих переменных?
47. Укажите способы вычисления градиента функции многих переменных.
48. Запишите формулу конечной разности вперёд для вычисления проекций градиента функции многих переменных.
49. Какова погрешность формулы конечной разности вперёд для вычисления проекций градиента функции многих переменных?
50. Как следует задавать приращение аргумента в формуле конечной разности вперёд для вычисления проекций градиента функции многих переменных?
51. Составьте алгоритм вычисления градиента функции многих переменных.
52. Какое количество дополнительных вычислений функции многих переменных необходимо выполнить для вычисления градиента по формуле конечной разности вперёд?
53. Запишите формулу центральной разности для вычисления проекций градиента функции многих переменных.
54. Какова погрешность формулы центральной разности для вычисления проекций градиента функции многих переменных?
55. Какое количество дополнительных вычислений функции многих переменных необходимо выполнить для вычисления градиента по формуле центральной разности?
56. В чем заключается основная идея метода Ньютона?
57. Представьте функцию многих переменных рядом Тейлора, ограничиваясь слагаемым второго порядка малости.
58. Выведите формулу метода Ньютона.
59. Дайте определение метода Ньютона для решения задачи безусловной минимизации функции многих переменных.
60. Приведите различные формулы метода Ньютона.

61. Запишите итерационные формулы метода Ньютона.
62. Опишите метод Ньютона.
63. Какой принцип задания направления шага в методе Ньютона?
64. Как вычисляется величина шага в методе Ньютона?
65. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона?
66. Какого порядка метод Ньютона?
67. Составьте алгоритм метода Ньютона.
68. В чем заключается преимущество решения системы линейных алгебраических уравнений перед обращением матрицы Гессе при вычислении направления поиска в методе Ньютона?
69. При каком условии направление поиска в методе Ньютона будет направлением спуска?
70. Какое другое название метода Ньютона вы знаете?
71. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона.
72. Обоснуйте метод Ньютона с одномерным поиском.
73. Запишите формулы метода Ньютона с одномерным поиском.
74. Опишите метод Ньютона с одномерным поиском.
75. Как находят шаг в методе Ньютона с одномерным поиском?
76. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона с одномерным поиском?
77. Какого порядка метод Ньютона с одномерным поиском?
78. Составьте алгоритм метода Ньютона с одномерным поиском.
79. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона с одномерным поиском.
80. Как выполняется проверка того, что направление метода Ньютона является направлением спуска?
81. По какому принципу задается направление одномерного поиска в методе Ньютона с направлением спуска?
82. Опишите метод Ньютона с направлением спуска.
83. Как вычисляется величина шага в методе Ньютона с направлением спуска?
84. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона с направлением спуска?
85. Какого порядка метод Ньютона с направлением спуска?
86. Составьте алгоритм метода Ньютона с направлением спуска.
87. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона с направлением спуска.
88. Приведите формулу метода Марквардта.
89. Какой принцип задания направления в методе Марквардта?
90. Как задаются параметры в методе Марквардта?

91. Как решается проблема плохой обусловленности системы линейных алгебраических уравнений в методе Марквардта?
92. Запишите итерационные формулы метода Марквардта.
93. Опишите метод Марквардта.
94. Как вычисляется величина шага в методе Марквардта?
95. Как заканчиваются вычисления в методе Марквардта?
96. Какого порядка метод Марквардта?
97. Составьте алгоритм метода Марквардта.
98. Укажите достоинства и недостатки метода Марквардта.
99. Какое другое название метода Марквардта вы знаете?
100. Обоснуйте метод Марквардта с одномерным поиском.
101. Запишите итерационные формулы метода Марквардта с одномерным поиском.
102. Опишите метод Марквардта с одномерным поиском.
103. Как находят шаг в методе Марквардта с одномерным поиском?
104. Как заканчивают метод Марквардта с одномерным поиском?
105. Какого порядка метод Марквардта с одномерным поиском?
106. Дайте алгоритм метода Марквардта с одномерным поиском.
107. Укажите достоинства и недостатки метода Марквардта с одномерным поиском.
108. Зачем вычислять матрицу Гессе функции многих переменных?
109. Дайте способ вычисления матрицы Гессе.
110. Запишите формулы конечных разностей для вычисления матрицы Гессе функции многих переменных.
111. Как следует задавать приращение аргумента в формулах конечных разностей для вычисления матрицы Гессе?
112. Какое количество дополнительных вычислений функции многих переменных необходимо выполнить для вычисления матрицы Гессе по формулам конечных разностей?
113. Запишите формулу центральных разностей для вычисления проекций градиента функции многих переменных.
114. Какова погрешность формулы центральных разностей для вычисления проекций градиента функции многих переменных?
115. Составьте алгоритм вычисления матрицы Гессе и градиента функции многих переменных.
116. Представьте в общем виде положительно определенную квадратичную функцию.
117. Запишите формулу для градиента квадратичной функции.
118. Приведите свойства квадратичной функции.
119. Найдите минимум положительно определенной квадратичной функции.

120. Выведите условие точного одномерного поиска для функции многих переменных.
121. Выведите условие точного одномерного поиска для квадратичной функции многих переменных.
122. Дайте определение сопряженных направлений.
123. Интерпретируйте понятие сопряженных векторов для единичной матрицы.
124. Сформулируйте и докажите лемму о линейной независимости сопряженных векторов.
125. Сформулируйте следствие леммы о линейной независимости сопряженных векторов.
126. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве параллельного подпространства.
127. Сформулируйте и докажите основную теорему методов сопряженных направлений.
128. Раскройте принцип расширяющихся подпространств и дайте его геометрическую интерпретацию.
129. Какие общие свойства методов сопряженных направлений вытекают из основной теоремы методов сопряженных направлений.
130. В чем заключается основная идея метода Пауэлла?
131. Запишите итерационные формулы метода Пауэлла.
132. Опишите метод Пауэлла.
133. По какому принципу задается направление шага в методе Пауэлла?
134. Как вычисляется величина шага в методе Пауэлла?
135. Как заканчиваются вычисления в методе Пауэлла?
136. Какого порядка метод Пауэлла?
137. Составьте алгоритм метода Пауэлла.
138. Укажите достоинства и недостатки метода Пауэлла.
139. Дайте определение методов сопряженных градиентов.
140. Сформулируйте и докажите основную теорему методов сопряженных градиентов.
141. Какие общие свойства методов сопряженных градиентов вытекают из основной теоремы этих методов.
142. Запишите формулу Флетчера – Ривса.
143. Запишите итерационные формулы метода Флетчера – Ривса.
144. Опишите метод Флетчера – Ривса.
145. Как вычисляется величина шага в методе Флетчера – Ривса?
146. Как заканчиваются вычисления в методе Флетчера – Ривса?
147. Какого порядка метод Флетчера – Ривса?
148. Составьте алгоритм метода Флетчера – Ривса.

149. Составьте алгоритм экономного метода Флетчера – Ривса.
150. Укажите достоинства и недостатки метода Флетчера – Ривса.
151. Дайте определение рестарта в методе Флетчера – Ривса.
152. Обоснуйте необходимость применения рестартов в методе Флетчера – Ривса.
153. Раскройте роль рестартов в повышении эффективности метода Флетчера – Ривса.
154. Запишите и обоснуйте формулу Полака – Рибьера.
155. Запишите итерационные формулы метода Полака – Рибьера.
156. Опишите метод Полака – Рибьера.
157. Как вычисляется величина шага в методе Полака – Рибьера?
158. Как заканчиваются вычисления в методе Полака – Рибьера?
159. Какого порядка метод Полака – Рибьера?
160. Составьте алгоритм метода Полака – Рибьера.
161. Чем отличается алгоритм метода Полака – Рибьера от алгоритма метода Флетчера – Ривса?
162. Укажите достоинства и недостатки метода Полака – Рибьера.
163. Обоснуйте преимущество метода Полака – Рибьера перед методом Флетчера – Ривса.
164. Какие вы еще знаете методы сопряженных градиентов?
165. Запишите и обоснуйте формулу Хестенса – Штифеля.
166. Запишите и обоснуйте формулу Диксона.
167. Запишите и обоснуйте формулу Даи – Юана.
168. Какие достоинства и недостатки метода Ньютона с одномерным поиском привели к открытию квазиньютоновских методов?
169. Дайте определение квазиньютоновских методов.
170. Выведите квазиньютоновское условие, на котором основаны квазиньютоновские методы.
171. Запишите уравнение коррекции для аппроксимации обратной матрицы Гессе.
172. Дайте определение поправки для аппроксимации обратной матрицы Гессе.
173. Как определяется направление одномерного поиска в квазиньютоновских методах?
174. Запишите итерационные формулы квазиньютоновских методов.
175. Опишите квазиньютоновские методы.
176. Как вычисляется величина шага в квазиньютоновских методах?
177. Как заканчиваются вычисления в квазиньютоновских методах?
178. Какого порядка квазиньютоновские методы?
179. Укажите достоинства и недостатки квазиньютоновских методов.
180. Какое другое название квазиньютоновских методов вы знаете?

181. Приведите формулы поправки ранга один.
182. Выведите формулу Бройдена.
183. Запишите итерационные формулы метода Бройдена.
184. Опишите метод Бройдена.
185. Как определяется направление одномерного поиска в методе Бройдена?
186. Как вычисляется величина шага в методе Бройдена?
187. Как заканчиваются вычисления в методе Бройдена?
188. Какого порядка метод Бройдена?
189. Составьте алгоритм метода Бройдена.
190. Укажите достоинства и недостатки метода Бройдена.
191. Приведите формулы поправки ранга два.
192. Выведите формулу Девидона – Флетчера – Пауэлла.
193. Запишите итерационные формулы метода ДФП.
194. Опишите метод Девидона – Флетчера – Пауэлла.
195. Как определяется направление одномерного поиска в методе Девидона – Флетчера – Пауэлла?
196. Как вычисляется величина шага в методе ДФП?
197. Как заканчиваются вычисления в методе ДФП?
198. Какого порядка метод Девидона – Флетчера – Пауэлла?
199. Составьте алгоритм метода Девидона – Флетчера – Пауэлла.
200. Укажите достоинства и недостатки метода ДФП.
201. На какой функции проявляются свойства метода Девидона – Флетчера – Пауэлла?
202. Приведите свойства метода Девидона – Флетчера – Пауэлла.
203. Выведите формулу БФГШ.
204. Запишите итерационные формулы метода БФГШ.
205. Опишите метод Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.
206. Как определяется направление одномерного поиска в методе Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно?
207. Как вычисляется величина шага в методе БФГШ?
208. Как заканчиваются вычисления в методе БФГШ?
209. Какого порядка метод БФГШ?
210. Составьте алгоритм метода БФГШ.
211. Укажите достоинства и недостатки метода БФГШ.
212. На какой функции проявляются свойства метода БФГШ?
213. Приведите свойства метода БФГШ.
214. Приведите формулу Шермана – Моррисона.
215. Приведите модифицированную формулу БФГШ.
216. Запишите итерационные формулы модифицированного метода Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.

217. Опишите модифицированный метод БФГШ.
218. Как определяется направление одномерного поиска в модифицированном методе Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно?
219. Как вычисляется величина шага в модифицированном методе Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно?
220. Как заканчиваются вычисления в модифицированном методе Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно?
221. Какого порядка модифицированный метод БФГШ?
222. Составьте алгоритм модифицированного метода Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.
223. Укажите достоинства и недостатки модифицированного метода Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.
224. На какие группы можно разделить методы многомерной безусловной оптимизации?
225. Дайте определение глобальной сходимости метода многомерной безусловной оптимизации.
226. Дайте определение асимптотической сходимости метода многомерной безусловной оптимизации.
227. Как определяется линейная сходимость метода многомерной безусловной оптимизации?
228. Приведите примеры методов многомерной безусловной оптимизации, обладающих свойством линейной сходимости.
229. Как определяется сверхлинейная сходимость метода многомерной безусловной оптимизации?
230. Приведите примеры методов многомерной безусловной оптимизации, обладающих свойством сверхлинейной сходимости?
231. Как определяется квадратичная сходимость метода многомерной безусловной оптимизации?
232. Приведите примеры методов многомерной безусловной оптимизации, обладающих свойством квадратичной сходимости?
233. Чем определяется выбор метода многомерной безусловной оптимизации для решения конкретной задачи оптимизации?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы автоматического регулирования / под ред. В. В. Солодовникова. – М. : Машгиз, 1954. – 1118 с.
2. Блох З. Ш. Динамика линейных систем автоматического регулирования машин / З. Ш. Блох. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 492 с.
3. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования / М. А. Айзерман. – М. : Наука, 1984. – 452 с.
4. Гольдфарб Л. С. Теория автоматического управления / Л. С. Гольдфарб. – М. : Высшая школа, 1976. – 400 с.
5. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 968 с.
6. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования / Э. Джури. – М. : Физматгиз, 1963. – 456 с.
7. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления / Ю. Ту. – М. : Машиностроение, 1964. – 703 с.
8. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А. А. Фельдбаум. – М. : Госуд. изд-во ф-м литературы, 1963. – 553 с.
9. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Физматгиз, 1961. – 392 с.
10. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1969. – 408 с.
11. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории процессов управления / Р. Беллман. – М. : ИИЛ, 1962. – 113 с.
12. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М. : Мир, 1971.
13. Ту Ю. Современная теория управления / Ю. Ту. – М. : Машиностроение, 1971. – 472 с.
14. Ройтман Н. С. Что такое идентификация? / Н. С. Ройтман. – М. : Наука, 1970. – 118 с.
15. Геращенко Е. И. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем / Е. И. Геращенко, С. М. Геращенко. – М. : Наука, 1975. – 296 с.
16. Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике / А. И. Кухтенко. – К. : ГИТЛ УССР, 1963. – 375 с.
17. Ивахненко А. Г. Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования / А. Г. Ивахненко. – К. : Гостехиздат УССР, 1957. – 52 с.
18. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем автоматического управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. – Л. : Энергия, 1969. – 208 с.
19. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой / С. В. Емельянов. – М. : Наука, 1967. – 336 с.
20. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. – М. : Наука, 1967. – 224 с.

21. Красовский А. А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами / А. А. Красовский. – М. : Машиностроение, 1967. – 240 с.
22. Летов А. М. Динамика полета и управление / А. М. Летов. – М. : Наука, 1969. – 312 с.
23. Красовский Н. Н. К теории аналитического конструирования регуляторов / Н. Н. Красовский, А. М. Летов // Автоматика и телемеханика. – 1962. – № 6, Т. 23. – С. 713–720.
24. Бутковский А. Г. Методы теории автоматического управления / А. Г. Бутковский, А. А. Фельдбаум. – М. : Наука, 1971. – 744 с.
25. Янушевский Р. Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления / Р. Т. Янушевский. – М. : Наука, 1973. – 464 с.
26. Сиразетдинов Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. – Новосибирск : Наука, 1967. – 232 с.
27. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. – М. : Наука, 1970. – 551 с.
28. Салуквадзе М. Е. Об оптимизации векторных функционалов / М. Е. Салуквадзе // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 9. – С. 5–15.
29. Кунцевич В. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. – М. : Наука, 1977. – 399 с.
30. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1984. – 161 с.
31. Кротов В. Ф. Приближенный синтез оптимального управления // Автоматика и телемеханика / В. Ф. Кротов. – 1964. – № 11. – С. 1521–1527.
32. Кудин В. Ф. Выбор минимизируемого функционала в нелинейных задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов / В. Ф. Кудин // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1976. – № 5. – С. 192–198.
33. Атанс М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М. : Машиностроение, 1984. – 764 с.
34. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М. : Наука, 1970. – 484 с.
35. Харитонов В. Л. Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы / В. Л. Харитонов // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 5. – С. 42–47.
36. Харитонов В. Л. Системы устойчивых квазиполиномов / В. Л. Харитонов // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 7. – С. 75–88.
37. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 212 с.
38. Емельянов С. В. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности / С. В. Емельянов, С. К. Коровин. – М. : Наука, 1977. – 352 с.
39. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. – М. : Наука, 1977. – 456 с.

40. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф. Л. Черноусько. – М. : Наука, 1988. – 320 с.
41. Кунцевич В. М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. – К. : Наукова думка, 1985. – 245 с.
42. Кунцевич В. М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В. М. Кунцевич. – К. : Наукова думка, 2006. – 264 с.
43. Аоки М. Оптимизация стохастических систем / М. Аоки. – М. : Наука, 1971. – 424 с.
44. Аоки М. Введение в методы оптимизации: основы и приложения нелинейного программирования / М. Аоки. – М. : Наука, 1977. – 343 с.
45. Бакан Г. М. Размытые эллипсоидальные множества в задачах нестохастического оценивания / Г. М. Бакан, Н. Н. Куусуль // Автоматика. – 1989. – № 5. – С. 11–17.
46. Александров Е. Е. Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е. Е. Александров // Техническая кибернетика : Изв. АН СССР. – 1990. – № 3. – С. 44–49.
47. Александров Е. Е. К вопросу параметрической оптимизации линейных регулируемых систем / Е. Е. Александров // Электромеханика : Изв. вузов. – 1990. – № 6. – С. 84–87.
48. Александров Е. Е. Алгоритм параметрической оптимизации дискретных регулируемых систем / Е. Е. Александров // Приборостроение : Изв. вузов. – 1990. – № 11. – С. 18–22.
49. Александров Е. Е. Параметрическая оптимизация линейных регулируемых систем при случайных внешних воздействиях / Е. Е. Александров // Электромеханика : Изв. вузов. – 1992. – № 3. – С. 39–43.
50. Александров Е. Е. Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е. Е. Александров, М. В. Бех. – Харьков : Основа, 1993. – 113 с.
51. Александров Е. Е. Математическое моделирование, системный анализ и синтез динамических систем / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2015. – 200 с.
52. Александров Е. Е. Параметрический синтез цифровой системы стабилизации танковой пушки / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 6. – С. 5–20.
53. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих. – М. : Наука, 1967. – 415 с.
54. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Физматгиз, 1959. – 468 с.
55. Огурк И. А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем / И. А. Огурк. – М.–Л. : Наука, 1965. – 207 с.
56. Малкин Н. Г. Теория устойчивости движения / Н. Г. Малкин. – М. : Наука, 1966. – 530 с.

57. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1965. – 559 с.
58. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем / А. М. Летов. – М. : Физматгиз, 1962. – 484 с.
59. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. – М. : Физматгиз, 1959. – 212 с.
60. Александров Е. Е. Оценка точности синтеза приближенно оптимального управления для нелинейного объекта / Е. Е. Александров, М. В. Тригуб // Приборостроение : Изв. вузов. – 1982. – № 10. – С. 27–31.
61. Александров Е. Е. О стабилизируемости нелинейных динамических систем / Е. Е. Александров // Электромеханика : Изв. вузов. – 1984. – № 6. – С. 93–97.
62. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966, т. 2. – 800 с.
63. Васильев С. К. Кибернетика в системах военного назначения / С. К. Васильев, В. Н. Захаров, Ю. Ф. Прохоров. – М. : Воениздат, 1979. – 263 с.
64. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. – Новосибирск : Наука, 1977. – 480 с.
65. Дегтярев Г. Л. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г. Л. Дегтярев, Т. К. Сиразетдинов. – М. : Машиностроение, 1986. – 216 с.
66. Репин Ю. М. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на моделирующем устройстве / Ю. М. Репин, В. Е. Третьяков // Автоматика и телемеханика. – 1963. – № 6. – С. 738–743.
67. Салуквадзе М. Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления / М. Е. Салуквадзе. – Тбилиси, 1975. – 201 с.
68. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем / А. Н. Воронин. – К. : Наук. думка, 1992. – 160 с.
69. Воронин А. Н. Векторная оптимизация динамических систем / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиятдинов, А. И. Козлов, В. С. Чабанюк. – К. : Техника, 1999. – 284 с.
70. Воронин А. Н. Компромиссный метод решения задач условной оптимизации / А. Н. Воронин // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 5. – С. 64–70.
71. Александрова Т. Е. Выбор оптимизируемого функционала в задачах параметрического синтеза систем стабилизации / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова // Артиллерийское и стрелковое вооружение : междунар. науч.-техн. журнал. – К. : КБ «Артиллерийское вооружение», 2004. – № 2 (1). – С. 23–26.
72. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1964. – 576 с.
73. Воронов А. А. Теория автоматического управления / А. А. Воронов. – М. : Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 504 с.
74. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.

75. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Выс. шк., 1980. – 408 с.

76. Гринев В. Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам / В. Б. Гринев, А. П. Филиппов. – К. : Наукова думка, 1975. – 296 с.

77. Раскин Л. Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л. Г. Раскин. – М. : Сов. Радио, 1976. – 344 с.

78. Жаров Ю. С. Рациональная схема демпфирования электронных стабилизаторов танкового вооружения / Ю. С. Жаров // Вестник бронетанковой техники. – 1965. – № 2. – С. 56–59.

79. Ледовский А. Д. Анализ возмущающих воздействий неуравновешенной танковой башни / А. Д. Ледовский, Р. И. Свердлов // Вестник бронетанковой техники. – 1969. – № 1. – С. 7–10.

80. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – СПб : Профессия, 2003. – 752 с.

81. Александрова Т. Е. Оценка точности стабилизации поля зрения прице- ла танковой пушки / Т. Е. Александрова, А. А. Лазаренко // Артиллерийское и стрелковое вооружение : междунар. науч.-техн. журнал. – К. : КБ «Артиллерийское вооружение». – 2011. – № 3. – С. 40–44.

82. Александрова Т. Е. Расчет параметров автоколебаний давления рабо- чей жидкости в гидросистеме стабилизатора канала вертикального наведения танковой пушки / Т. Е. Александрова, А. А. Лазаренко // Інтегровані технології та енергозбереження : наук.-техн. журнал. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 3. – С. 24–30.

83. Александрова Т. Е. Рекурсивные цифровые фильтры Баттеруорта для стабилизаторов подвижных объектов / Т. Е. Александрова, А. А. Лазаренко, А. В. Зейн // Технічна електродинаміка : наук.-прикл. журнал. – Спец. вип.: Си- лова електроніка та енергоефективність. – К. : Ін-т електродинаміки НАНУ. – 2012. – Ч. 1. – С. 86–89.

84. Александрова Т. Е. Сравнительный анализ цифровых ПД-стабилизато- ров подвижных объектов с низкочастотными фильтрами Баттеруорта и Ланцо- ша / Т. Е. Александрова, В. А. Кононенко, А. А. Лазаренко, А. В. Зейн // Радіо- електроніка. Інформатика. Управління : наук.-техн. журнал. – Запоріжжя : ЗНТУ. – 2011. – № 2. – С. 148–152.

85. Александрова Т. Е. Структурно-параметрический синтез стабилизатора упругой танковой пушки. – Ч. 1 : Математические и имитационные модели / М. Д. Борисюк, А. С. Куценко, Т. Е. Александрова и др. // Озброєння та війсь- кова техніка. – К. : ЦНДІ ОВТ. – 2014. – № 4. – С. 20–34.

86. Александрова Т. Е. Об особенностях построения инвариантной систе- мы наведения и стабилизации танковой пушки / Т. Е. Александрова, А. А. Ла- заренко, А. В. Зейн // Системи озброєння і військова техніка : наук. журнал. – Харків : Харк. ун-т Повітряних Сил. – 2014. – № 4(40). – С. 3–6.

87. Александрова Т. Е. Параметрический синтез оптимальных робастных стабилизаторов подвижных объектов / Т. Е. Александрова // Радіоелектроніка.

Інформатика. Управління : наук.-техн. журнал. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2012. – № 1. – С. 141–143.

88. Александрова Т. Е. Параметрический синтез оптимальных робастных стабилизаторов подвижных объектов / Т. Е. Александрова // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2012. – № 1. – С. 141–143.

89. Александрова Т. Е. Параметрический синтез грубых информационно-управляющих систем / Т. Е. Александрова // Механіка та машинобудування : наук.-техн. журнал. – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – № 1. – С. 125–132.

90. Аттетков А. В. Методы оптимизации : учебник для вузов / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.

91. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди ; пер. с англ. О.В. Шихеевой. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.

92. Бейко И. В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П.Н. Зинько. – К. : Вища школа, 1983. – 512 с.

93. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт ; пер. с англ. В.Ю. Лебедева. – М. : Мир, 1985. – 512 с.

94. Городецкий С.Ю. Лабораторный практикум по методам локальной оптимизации в программной системе LocOpt / С.Ю. Городецкий. – Нижний Новгород : НГУ, 2007. – 124 с.

95. Дьяконов В.П. MATLAB 7.*/R2006/R2007: Самоучитель / В.П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2008. – 768 с.

96. Дэннис Д. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Д. Дэннис, Р. Шнабель ; пер. с англ. О.П. Бурдакова. – М. : Мир, 1988. – 440 с.

97. Измаилов А. Ф. Численные методы оптимизации : учеб. пособие / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

98. Карманов В. Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 256 с.

99. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину ; пер. с фр. А.И. Штерна. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с.

100. Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М. : Высш. шк., 2002. – 544 с.

101. Раскин Л. Г. Математическое программирование : учеб.-метод. пособие / Л. Г. Раскин. – Харьков : ПП «ГЕММА», 1986. – 68 с.

102. Реклейтис Г. Оптимизация в технике : в 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – Кн. 1 ; пер. с англ. В. Я. Алтаева, В. И. Моторина. – М. : Мир, 1986. – 349 с.

103. Северин В. П. Методы одномерного поиска : учеб.-метод. пособие по курсу «Методы оптимизации» / В. П. Северин. – Х. : НТУ «ХПІ», 2012. – 112 с.

104. Семушин И. В. Практикум по методам оптимизации. Компьютерный курс : учеб. пособие / И. В. Семушин, Е. В. Курышова. – Ульяновск : УГУ, 2005. – 145 с.

105. Струченков В. И. Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы : учеб. пособие / В. И. Струченков. – М. : Экзамен, 2005. – 256 с.
106. Сухарев А. Г. Курс методов оптимизации : учеб. пособ. / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – 2-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.
107. Форсайт Д. Машинные методы математических вычислений / Д. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер ; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. – М. : Мир, 1980. – 280 с.
108. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау ; пер. с англ. И. М. Быховской, Б. Т. Вавилова. – М. : Мир, 1975. – 536 с.
109. Bazaraa M. S. Nonlinear programming : theory and algorithms / M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty. – 3-d edition. – USA, Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons Inc., 2006. – 853 p.
110. Fletcher R. Practical methods of optimization / R. Fletcher. – 2-d edition. – UK, Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2000. – 436 p.
111. Luenberger D. G. Linear and nonlinear programming / D.G. Luenberger, Y. Yinyu. – 3-d edition. – USA, New York : Springer, 2008. – 546 p.
112. Sun W. Optimization theory and methods. Nonlinear programming / W. Sun, Y. X. Yuan. – USA, New York: Springer, 2006. – 687 p.
113. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. – 4-е изд., доп. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 142 с.
114. Короп В. Ф. Принцип равномерного вклада и регулирование шагов покоординатного случайного поиска / В.Ф. Короп // Численные методы нелинейного программирования. – К. : Наук. думка. – 1976. – С. 33–41.
115. Полак Д. Численные методы оптимизации. Единый подход / Д. Полак ; пер. с англ. Ф. И. Ерешко. – М. : Мир, 1974. – 376 с.

Навчальне видання

АЛЕКСАНДРОВ Євген Євгенович
АЛЕКСАНДРОВА Тетяна Євгенівна
СЕВЕРИН Валерій Петрович

ОСНОВИ СУЧАСНОЇ ТЕОРІЇ УПРАВЛІННЯ

Навчальний посібник

Російською мовою

Відповідальний за випуск *Куценко О. С.*

Авторська редакція

ВИДАВНИЦТВО

Видавничий центр НТУ «ХП»,
вул. Кирпичова 2, м. Харків-2, 61002

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Підписано до друку 17.06.2019 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Суг. Віддруковано на ризографі.
Умовн. друк. арк. 14,5. Обл.-вид арк.
Замовлення № Наклад прим. Ціна договірна.

Віддруковано ФОП Крамаренко Ю. М.
Свідоцтво про держреєстрацію АБ № 815827
від 22.03.2013 р.